This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.M385

ALGEBRÆ
GEOMETRIA PROMOTÆ
ELEMENTA

Conſcripta ad uſum

FAUSTINÆ
PIGNATELLI

Principis Colubranenſis, & Tolvenſis Ducatus Hæredis.

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematum Profeſſore

TOM. III.

Excudebat Felix Carolus Moſca ſumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI MDCCXXXVII.

Lib. Com.
Maglione
2-10-28
16615

ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER III.

De Compoſitione Locorum Geometricorum.

1. DUobus libris præcedentibus Algebram, in ſe ipſa conſideratam, & abſque ullo ad Geometriam reſpectu, complexi ſumus. Nunc de eadem diſſeremus, prout cum Geometria conſociari poteſt, & majora exinde incrementa ſubire. Plane vero, conjungendo Algebram cum Geometria, licebit, utriuſque ſcientiæ fines in immenſum extendere. Nam, ſicuti Algebra, Geometriæ conſortio, liberatur iis difficultatibus, quibus obnoxia deprehenditur; ita & Geometria, Algebræ præſidio, adeo quidem promovetur, ut omnibus ſuis numeris perfecta, ac abſoluta videatur.

2. Quemadmodum enim Algebra in reſolutione problematum mathematicorum æquationum utitur artificio; ſic & æquationes reſolutioni problematum tunc demum conferunt, ubi earundem radices nobis innoteſcunt. Quum ergo non omnium æquationum radices poſſint

N. 65

algebraice definiri; fit hinc, ut neque etiam omnium problematum mathematicorum reſolutio, Algebræ ſubſidio, queat obtineri. Unde, ut huic malo obviam ire valeamus, præſtat, Algebram cum Geometria conſociare, ipſaſque radices æquationum per longitudines rectarum definire. Sic enim nulla erit æquatio, cujus radices tali pacto exhiberi non poſſint.

3. Jam, ad deſignandas radices cujuſque æquationis per longitudines rectarum, compoſitione locorum geometricorum opus eſt. Quare, ut, Geometriæ beneficio, poſſit Algebræ difficultatibus ſatisfieri; viſum eſt, duobus libris præcedentibus alios totidem ſubnectere; ac in uno quidem complecti univerſam de locis geometricis theoriam; in altero autem oſtendere, quomodo per loca geometrica radices cujuſque æquationis poſſint exhiberi. Utroque interim argumento abunde patebit, non modo Algebram promoveri, ſuamque ei perfectionem accedere; ſed ipſam quoque Geometriam ad eum extenſionis gradum aſcendere, ad quem humani ingenii viribus evehi poteſt.

4. Loca porro geometrica, etſi triplicis ſpeciei ſint, & eorum alia dicantur ad lineam, alia ad ſuperficiem, & alia demum ad ſolidum; quæ tamen uſui nobis eſſe debent, ſunt loca, quæ vocantur ad lineam. Sed hujuſmodi loca nec etiam unius ſunt generis, quin poſſunt ipſorum infinita propemodum genera diſtingui. Quæ vero ut plurimum uſu veniunt, ſunt loca, quæ ad primum, ſecundumque genus referuntur. Unde de iis duplici ſectione ſeorſim ab aliis agendum nobis erit. In prima enim, quæ ſint

lineæ, loca iſta terminantes, quæve iiſdem lineis proprietates competant, oſtendemus. In altera, qua ratione eorundem locorum compoſitio perfici poſſit, in medium afferemus.

5. Et ſane, qui Algebræ, ſeu ſpecioſæ Analyſis Elementa hactenus conſcripſerunt, doctrinam de locis geometricis non ultra evehere curarunt. Eſſe enim multiplicis generis loca, quæ dicuntur ad lineam, omnes ſane docuerunt. Sed, ubi locorum compoſitionem ſunt aggreſſi, iis tantum componendis animum appulerunt, quæ primum, ſecundumque genus conſtituunt. Quamquam vero loca ſuperioris generis non ita frequenter uſui nobis futura ſint; optandum tamen eſſet, ut generalis methodus haberetur, qua, tum lineæ, loca cujuſque generis terminantes, poſſent a ſe mutuo diſtingui, cum earundem linearum proprietates definire liceret.

6. Id igitur in tertio hoc libro noſtrorum Algebræ Elementorum potiſſimum præſtare conabimur. Nam, poſtquam in primis duabus ſectionibus ea omnia fuerint a nobis expoſita, quæ paſſim circa loca primi, & ſecundi generis tradi ſolent, adjiciemus deinde duas alias ſectiones; quarum altera generalem methodum aperiet, pro rimandis affectionibus linearum, quibus loca cujuſcumque generis terminantur, & pro iis a ſe invicem accurate diſtinguendis; altera methodi ejus uſum oſtendet in lineis illis, quibus loca terminantur, quæ ad tertium genus referuntur, & tum ſpecies harum linearum, cum proprium cujuſque accidens in propatulo ponet.

7. Neque vero vitio nobis verti debet, quod methodum generalem, poſt expoſitam

theoriam locorum primi, & ſecundi generis, in medium afferimus. Neque enim ea ſemper eſt recta docendi methodus, quæ ab univerſalibus ad particularia progreditur: idque nos efficere cogimur, tum quia illiuſmodi loca, ut jam dictum eſt *, ſæpius occurrunt, adeoque paulo diligentius ſunt expendenda; tum etiam, quia, expoſita eorum locorum theoria, facile erit, generalem methodum explicare, quæ ad omnia locorum genera ſe extendat; quandoquidem, ad clariorem ejus methodi intellectum, ipſa illa loca, velut exempla, poterunt adhiberi.

* Art. 4.

8. Acturi igitur de compoſitione locorum geometricorum, partem Geometriæ ſublimiorem, quæ de lineis curvis ediſſerit, ſimul enodabimus. Ea autem, quam nobis præſcripſimus, differendi ratione, non aliæ curvæ ſpeciatim ſub contemplationem venient, quam conicæ Veterum ſectiones ejuſdem cum circulo gradus, & quas eis uno gradu ſuperiores primus omnium Newtonus enumerare ſuſcepit. Unde, quia præter iſtas, commendantur apud Geometras quamplures aliæ, quarum pleræque ipſis etiam Veteribus innotuerunt: proinde, ne aliquid hic deſit, quod ſcitu ſit dignum; ad calcem hujus libri appendicem adjiciemus, in qua omnes alias curvas, quæ ſaltem ſuis nominibus celebrantur, ea, qua fieri poteſt, brevitate ſigillatim proſequi non gravabimur.

SE-

SECTIO I.

De Lineis, Loca Primi, & Secundi Generis Terminantibus.

9. LOcus geometricus vocatur ſeries illa punctorum, quibus alicui problemati geometrico, indeterminate propoſito, ſatisfieri poteſt. Ubi enim problema geometricum eſt; pro ejus ſolutione puncti alicujus poſitio debet determinari. Plane vero, quum idem problema indeterminate proponitur; infinita erunt hujuſmodi puncta, poſitione determinanda. Quare ſeries horum punctorum, ſive potius quantitas, in qua omnia hujuſmodi puncta locantur; locus vocabitur geometricus. Quumque quantitas iſta eſſe poſſit, vel linea, vel ſuperficies, vel ſolidum: hinc eſt, ut locorum alia dicantur ad lineam, alia ad ſuperficiem, & alia demum ad ſolidum[1].

10. Ut tres iſtæ locorum ſpecies a ſe mutuo diſtingui poſſint, meminiſſe oportet, quod, ſicuti loca geometrica ſuum ortum trahunt ex ſolutione eorum problematum geometricorum, quæ ſunt natura ſua indeterminata; ita illud problema haberi * debet, velut indeterminatum, in quo non omnes adſunt conditiones, quæ ad plenam ejus, quod quæritur, determinationem neceſſariæ judicantur. Hinc itaque fit, ut non omnia loca geometrica ejuſdem ſpeciei ſint. Nam, deficiente una tantum conditione, locus erit ad li- *lib. 2. art. 79.

neam; deficientibus duabus conditionibus, locus erit ad ſuperficiem; & denique, ubi tres in problemate conditiones deſunt, locus erit ad ſolidum.

11. Quæ quum ita ſint, eædem locorum ſpecies poſſunt etiam a ſe invicem diſtingui per æquationem, quæ omnes ipſius problematis indeterminati conditiones includit. Ubi enim hujuſmodi æquatio duas continet incognitas, locus erit ad lineam; quia ad determinationem problematis una tantum conditio deeſt. Quotieſcumque vero in eadem æquatione tres occurrunt incognitæ, locus erit ad ſuperficiem; quia pro determinando problemate duæ conditiones requiruntur. Et denique, quum æquatio quatuor incognitas complectitur, locus erit ad ſolidum; quia tribus conditionibus opus eſt, ut problema plene determinatum evadat.

CAPUT I.

Locorum geometricorum natura, geneſis, ac differentiæ.

12. Quamquam locorum geometricorum tres ſpecies paſſim diſtinguantur, & eorum alia vocentur ad lineam, alia ad ſuperficiem, & alia demum ad ſolidum; quæ tamen, ad Algebram promovendam, uſui nobis eſſe debent, ea ſunt, quæ ad priorem ſpeciem referuntur, quæque, ad aliorum differentiam, loca ad lineam communiter dicuntur. Horum ergo locorum naturam, geneſim, ac differentias paulo

ac-

accuratius, oportet, proſequamur. Quumque de hiſce tantum locis hoc libro agendum nobis erit; juvat, in anteceſſum adnotare, quod, ubi ſimpliciter, & abſolute loca vocamus geometrica, non alia intelligi debent, quam, quæ linearum longitudinibus terminantur.

I. *Quid ſit locus geometricus, & quomodo oriri intelligatur.*

13. QUemadmodum problemata geometrica ea quidem cenſenda ſunt, quæ circa quantitates inſtituuntur, capaces poſitionis; ita unumquodque problema geometricum ad tales ſemper terminos revocare licebit, ut pro ejus ſolutione ſatis ſit, puncti alicujus poſitionem definire. Iſta autem puncta, quemadmodum ſunt numero infinita, quum problema eſt indeterminatum natura ſua; ita locantur omnia in data quadam linea, quum una dumtaxat conditio ad determinandum problema requiritur. Plane vero linea iſta, in qua omnia illiuſmodi puncta locantur, locus vocabitur geometricus.

14. Neque vero difficile erit oſtendere, quod, ubi problema indeterminatum eſt, unius dumtaxat conditionis defectu, locantur in data quadam linea omnia illa infinita puncta, per quæ ei ſatisfieri poteſt. Jam enim, una tantum in problemate conditione deficiente, ejus localis æquatio duas debet incognitas continere. Quare eo res redit, ut oſtendamus, æquationem, quæ duas complectitur incognitas, locum ad lineam nobis præbere. Id vero generaliter oſtende-

demus in hunc, modum.

15. Sint x, & y binæ æquationis incognitæ. Sane utraque harum incognitarum infinites valores admittit; ſed, una ex iis determinata, neceſſe eſt, ut altera quoque ſuam determinationem ſubeat. Referant itaque portiones FIG. 1. AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ x; & cuique earum correſpondebit incognita altera y determinato valore. Ducantur ergo per ſingula puncta N parallelæ totidem NM, quæ referant valores correſpondentes incognitæ y; & linea, tranſiens per extremitates ipſarum NM, locus erit quæſitus.

16. Jam, quum ſimpliciter de explicanda æquatione agitur, angulus ANM poteſt ad libitum aſſumi. Sed, ſi una cum æquatione ſatisfaciendum ſit quoque problemati, unde ea fluxit æquatio; tunc angulus ille talis oportet capiatur, qualem ipſum exigit problema. Nec ſilentio reticendum, in priore caſu poſſe eundem angulum talem aſſumi, ut rectæ NM, vel ſint indirectum cum ipſis AN, vel cadant ad partem oppoſitam: nimirum, quum dando eis poſitionem iſtam, ad unum idemque punctum omnes terminantur.

17. Inde vero non ſequitur, ut locus vocari debeat ad punctum. Nam, quum id contingit, locus proprie conſtituitur per extremitates alias N; quandoquidem, tum loci ad lineam, cum aliorum locorum conſtitutio talis eſſe debet, ut per quodlibet ejus punctum omnes ſimul æquationis incognitæ determinentur. Debet enim unoquoque loci puncto fieri ſatis æquationi, ex problemate ortæ. Profecto

au-

autem, quum æquatio duabus, aut pluribus conſtat incognitis, non aliter ei fiet ſatis, quam, determinando ſimul ſingulas incognitas, quæ in illa continentur.

18. Ut autem demonſtratio illa generalis caſibus ſpecialibus poſſit applicari, non aliud fieri debet, quam, ut in ſolutione problematis, unde oritur locus, pro incognitis capiantur rectæ illæ, quæ extremitatibus ſuis ſibi mutuo occurrunt, & occurſu illo datum angulum conſtituunt. Ita, ſi ſuper recta AB, longitudine, ac poſitione data, conſtitui debeat triangulum rectangulum AMB, cujus ipſa AB ſit hypothenuſa; jam eo res redit, ut poſitio puncti M determinetur. Demiſſo autem ſuper AB perpendiculo MN, ſumi poterunt, velut incognitæ, rectæ duæ AN, MN, quæ ſibi invicem occurrunt, rectumque angulum continent. FIG. 1.

19. Si enim, poſita AB $= a$, fiat AN $= x$, & MN $= y$; erit portio reliqua BN $= a - x$, & rectangulum ANB $= ax - x^2$. Quare, quum, ob notiſſimam proprietatem trianguli rectanguli, quadratum ex MN ſit æquale rectangulo ANB; erit $y^2 = ax - x^2$ propoſiti problematis æquatio. Plane vero, ſicuti æquatio iſta, ob duas, quas continet, incognitas, oſtendit, infinita eſſe illiuſmodi puncta M; ita habebitur locus omnium illorum punctorum, ſi ſumptis ſuper AB infinitis valoribus, quos x habere poteſt, iis ad rectos angulos applicentur correſpondentes valores alterius incognitæ y.

20. Interim haud quidem putandum eſt, loca geometrica expoſita ratione componi debere; ſed fiet earum compoſitio, definiendo limites,

ſeu

ſeu lineas, quibus loca ipſa terminantur. Ita in allato problemate, unde orta eſt æquatio $y^2 = ax - x^2$, verum quidem eſt, quod, capiendo ſuper AB valores omnes incognitæ x, & applicando eis ad rectos angulos valores correſpondentes alterius incognitæ y, oritur locus quæſitus; nihilo tamen minus ejus compoſitio fiet, deſcribendo lineam, ad quam ipſe locus nos manuducit.

21. Hinc locorum compoſitio duo quidem præſupponit. Primum eſt cognitio linearum, ad quas locales problematum æquationes nos manuducunt. Alterum eſt ratio deſcribendi in plano eaſdem lineas. Horum utrumque ad illam pertinet Geometriæ partem, quæ Elementaris appellatur. Et ea, quæ de compoſitione locorum ediſſerit, nonniſi poſt partem illam Elementarem eſt addiſcenda: quæ tamen eo tendit, ut ope ejus partem Geometriæ nobiliorem, quæ de ſolutione problematum agit, tandem aſſequi liceat.

II. *Qua ratione natura cujuſque lineæ calculo ſubjici poſſit.*

22. Diximus *, locorum compoſitionem obtineri, deſcribendo lineas, ad quas locales problematum æquationes nos manuducunt. Quæ vero ſint iſtæ lineæ, facile ex ipſis æquationibus dijudicare licebit. Nam quælibet linea ſuam habet æquationem peculiarem, ac propriam. Hinc, oſtenſa natura, ac geneſi locorum geometricorum, illud modo paucis explicandum nobis eſt, qua quidem ratione na-

* art. 20.

tu-

tura cujuſque lineæ poſſit calculo ſubjici, & per æquationem duarum incognitarum definiri.

23. Nimirum id obtinetur, referendo lineæ, de qua agitur, puncta omnia ad puncta alia rectæ, poſitione datæ, per totidem rectas parallelas, & inveniendo æquationem, quæ relationem illam nobis oſtendat. Ut, ſi AM ſit linea, de qua eſt quæſtio, ex ſingulis ejus punctis M ducere licebit ad rectam aliquam, poſitione datam, AB parallelas totidem MN, & definire naturam illius per æquationem, quæ exprimat nobis relationem, quam quælibet earum parallelarum MN habet ad portionem correſpondentem AN. FIG. 1.

24. Supponamus namque, ſi placet, lineam illam AM deſcriptam per interſectionem duarum rectarum AX, BZ, quæ ita quidem revolvantur circa puncta, poſitione data, A, & B, ut, erecta ſuper AB perpendiculari AC, ſit angulus ABZ perpetuo æqualis angulo CAX. Et fingamus quoque, rectas MN parallelas eſſe ipſi AC, atque adeo perpendiculares ſuper portionibus correſpondentibus AN, cum quibus datam quandam relationem ſervare debent.

25. Quia igitur angulus ABZ æqualis eſt angulo CAX: appoſito communi angulo BAX, erunt duo anguli ABZ, BAX æquales toti angulo BAC. Sed totus angulus BAC eſt rectus ex hypotheſi. Quare etiam uni recto æquales erunt anguli duo ABZ, BAX: & propterea tertius angulus AMB etiam rectus erit. Unde, quum ex angulo recto M demiſſa ſit ad hypothenuſam AB perpendicularis MN; erit MN quadratum æquale rectangulo ANB.

26. Hinc, quemadmodum abunde liquet, lineam

neam AM eſſe circuli circumferentiam, diametrum habentem rectam AB; ita facile quoque erit, æquationem invenire, quæ exprimat nobis relationem, quam quælibet parallelarum MN habet ad ſuam portionem correſpondentem AN. Ponatur namque tota AB $= a$, AN $= x$, & MN $= y$. Erit igitur reliqua portio BN $= a - x$, & rectangulum ANB $= ax - x^2$: proindeque, quia MN quadratum eſt æquale rectangulo ANB, erit $y^2 = ax - x^2$ æquatio quæſita.

27. Hac igitur ratione, lineam quamvis calculo ſubmittere licebit, & per æquationem duarum incognitarum naturam ejus definire. Sed rectæ illæ, quarum relationem lineæ æquatio nobis exhibet, certis quibuſdam vocibus ſolent appellari. Nimirum dicuntur ordinatæ parallelæ omnes MN, quæ ex lineæ punctis, ad rectam, poſitione datam, demittuntur; & vocantur abſciſſæ portiones omnes AN ejuſdem rectæ, poſitione datæ, quæ parallelis illis correſpondent.

28. Quin etiam, quemadmodum dici ſolet origo, ſeu principium abſciſſarum punctum A, ad quod abſciſſæ omnes terminantur; ſic etiam ipſa recta, poſitione data, AB, ſuper qua abſciſſæ capiuntur, linea abſciſſarum paſſim vocitatur. Et, ſi per punctum A ducatur recta AC, quæ definiat poſitionem omnium ordinatarum, adeo nempe, ut ei ſint parallelæ ordinatæ omnes MN; poterit recta iſta AC linea ordinatarum pariter appellari.

29. Nihil autem vetat, abſciſſas quidem in ordinatas, & per contrarium ordinatas in abſciſſas tranſmutare. Si enim ex punctis M, ejuſdem lineæ AM ducantur ſuper AC rectæ totidem MO

pa-

parallelæ ipſi *AB*; ſumi poterunt rectæ iſtæ MO, velut ordinatæ; & portiones, eis correſpondentes, AO, tanquam abſciſſæ. Plane vero, quum propter parallelogramma AM, fiant rectæ MO æquales ipſis AN, & portiones AO æquales ipſis *MN*; liquet, abſciſſas quidem verſas eſſe in ordinatas, & viciſſim ordinatas in abſciſſas. Unde etiam fiet AC linea abſciſſarum, & AB linea ordinatarum.

30. Hac tamen transformatione, æquatio ipſius lineæ AM non aliam ſubit mutationem, quam, quod ordinatam refert incognita illa, quæ prius deſignabat abſciſſam; & viciſſim abſciſſam ea incognita, per quam antea ordinata repræſentabatur. Unde, ſi *id* aſſumere velimus, ut incognita x referat ſemper abſciſſam, & incognita altera y referat continuo ordinatam: plane neceſſe eſt, ut in ea transformatione alternatim in æquatione mutentur incognitæ. Qua ratione in exemplo, ſuperius allato, ſicuti æquatio lineæ eſt $y^2 = ax - x^2$, ubi MN ſunt ordinatæ, & AN abſciſſæ; ſic erit $x^2 = ay - y^2$, quum viciſſim MO ſunt ordinatæ, & AO abſciſſæ. *art. 26.*

III. *Diſtinctio linearum in geometricas, & mechanicas expoſita, ac emendata.*

31. Vidimus, lineas omnes calculo ſubmitti, inveniendo æquationem, quæ exprimat nobis relationem inter ordinatas, & abſciſſas correſpondentes. Sed hujuſmodi æquatio non ſemper poteſt reperiri. Eſto enim quadratum ABCD; & interea ac latus ejus AD fertur æquabiliter, & ſibi ipſi continuo æqui- FIG. 2.

di-

diſtanter verſus BC, revolvatur motu etiam æquabili circa punctum B latus alterum AB: adeo, ut in fine motus utrumque latus AD, AB reperiatur eodem tempore ſuper BC.

32. Quum ſic duo illa latera feruntur, perſpicuum eſt, continua eorum interſectione, deſcribi lineam curvam AME. Sed, demiſſis ex ſingulis ejus punctis M rectis MN, perpendicularibus ſuper AB, fruſtra quæretur æquatio, exprimens relationem inter unamquamque ipſarum MN, & portionem correſpondentem AN; quum nulla adſit in deſcripta curva proprietas, quæ ad inveniendam æquationem illam nos manuducere poſſit.

33. Ut enim ex ipſa curvæ geneſi liquet, præcipuum ejus accidens hoc eſt, quod, producta BM uſque donec quadrantem AC ſecet in O, eſt ſemper, ut AN ad BN, ita AO ad CO. Quare, poſitis AB $= a$, AN $= x$, & MN $= y$, determinanda eſſet, ope iſtarum quantitatum, ratio arcuum AO, CO, ut optata æquatio poſſet haberi. Unde, quum ratio illa nequeat ullo pacto definiri; nec item optatam æquationem invenire licebit.

34. Id, quum ita ſit, duo paſſim linearum ſpecies diſtinguuntur, & ex iis aliæ dicuntur geometricæ, aliæ vero mechanicæ. Prioris ſpeciei lineæ ſunt illæ, in quibus relatio ordinatarum ad abſciſſas correſpondentes æquatione aliqua poteſt definiri. Per contrarium vero lineæ alterius ſpeciei ſunt eæ, in quibus eadem illa relatio nulla poteſt æquatione deſignari.

35. Hanc linearum diſtinctionem in geometricas, & mechanicas primus omnium protulit Car-

Carteſius; nec alias in Geometriam admittendas eſſe cenſuit, quam quæ geometricarum nomen apud ipſum ſortitæ ſunt; quia eæ tantum ſub certam, determinatamque cadunt menſuram. Unde reliquas vocavit mechanicas, quia ad mechanicam potius eas pertinere judiçavit.

36. Et ſane, quin lineæ, mechanicæ dictæ, valde differant ab iis, quæ paſſim geometricæ nuncupantur, non eſt dubitandum. Sed non ideo illiuſmodi curvæ a Geometria exules eſſe debent, quemadmodum voluit Carteſius; quandoquidem, ſi mente concipiantur deſcriptæ, habebunt perinde, ac lineæ ipſæ geometricæ, conſtantes quaſdam proprietates, quæ ad omnia earundem linearum puncta ſe extendent.

37. Huc adde, quod, beneficio ejus Analyſis, quæ quantitates per ſuas infiniteſimas ſupputat, etiam in lineis mechanicis reperire licet æquationem, quæ exprimat nobis relationem ordinatarum ad ſuas abſciſſas correſpondentes. Nec aliud ſane diſcriminis occurrit, quam, quod in iis hujuſmodi æquatio ad infinitas ſemper dimenſiones aſcendit: quo factum, ut a nonnullis lineæ tranſcendentes dicerentur.

38. Ita, in allato exemplo, ſi ex puncto O demittantur ſuper ipſis AB, BC perpendicula OP, OQ, ponaturque $OP = p$, & $OQ = q$; per ea, quæ alibi * oſtenſa ſunt, fiet arcus quidem $AO = p + p^3 : 6a^2 + 3p^5 : 40a^4 + 5p^7 : 112a^6 + 35p^9 : 1152a^8 +$ &c., arcus vero $CO = q + q^3 : 6a^2 + 3q^5 : 40a^4 + 5q^7 : 112a^6 + 35q^9 : 1152a^8 +$ &c. Unde, quum ſit, ut AO ad CO, ita AN ad BN; per notiſſimam quantitatum proportionalium proprietatem, habebitur æquatio

* *lib.* 2. *ar.* 1151.

$(p+q)x+(p^3+q^3)x:6a^2+(3p^5+3q^5)x:40a^4+(5p^7+5q^7)x:112a^6+(35p^9+35q^9)x:1152a^8+$ &c. $=pa+p^3:6a+3p^5:40a^3+5p^7:112a^5+35p^9:1152a^7+$ &c.

39. Verum quidem eſt, in hac æquatione contineri etiam incognitas p, & q, nec eam ingredi incognitam y; ſed facile erit, illas eliminare, & earum loco iſtam invehere. Quum enim, ob triangula æquiangula BMN, BOP, BM ſit ad MN, ut BO ad OP; erit, ut $\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}$ ad y, ita a ad p: proindeque fiet $p=ay:\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}$. Et ſimiliter, quia ob triangula æquiangula BMN, BOQ, BM eſt ad BN, ut BO ad OQ; erit, ut $\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}$ ad $a-x$, ita y ad q: & propterea fiet $q=(a-x)y:\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}$.

IV. *Quomodo lineæ omnes in certa genera diſtingui poſſint.*

40. QUemadmodum Analyſtæ, lineas omnes calculo ſubjicientes, definiunt naturam cujuſque ipſarum per æquationem, quæ exprimat nobis relationem ordinatarum ad abſciſſas ſuas correſpondentes; ſic omnem linearum molem in certa genera diſtinguunt, ſecundum numerum dimenſionum, ad quas, habita utriuſque incognitæ ratione, earum æquationes aſcendunt. Interim diſtinctionem iſtam linearum in varia genera non omnes eodem modo inſtituerunt.

41. Primus namque Carteſius genera linearum, non unica, ſed duabus dimenſionibus a ſe mutuo diſtinxit. Vocavit enim lineas primi ge-

generis, quarum æquationes quadratum, vel rectangulum duarum incognitarum non excedunt. Vocavit lineas ſecundi generis, quarum natura æquationibus, ad tres, vel quatuor dimenſiones aſcendentibus, definitur. Vocavit lineas *tertii generis*, quarum æquationes ad quinque, vel ſex dimenſiones aſſurgunt; atque ita deinceps.

42. Ut genera linearum ſubinde a ſe mutuo diſtingueret, non aliud Carteſium movit, quam, quia, ſicuti æquationes quatuor dimenſionum per regulam, a Bombellio excogitatam, facili negotio deprimuntur ad alias, quæ ad tres tantum dimenſiones aſcendunt; ſic etiam regula poſſit inveniri, qua mediante æquationes ſex dimenſionum ad alias quinque, æquationes octo dimenſionum ad alias ſeptem, atque ita deinceps, deprimi queant.

43. Interim regula iſta non adhuc Algebræ Cultoribus innotuit, nec eam pro omni, quod adhibuimus, ſtudio licuit unquam nobis reperire. Et deinde, ſi eam excogitare liceret, ut jam olim acutiſſime Petrus Fermatius, Senator Toloſanus, adnotavit, nec etiam uſui nobis eſſe poſſet ad deprimendas æquationes, quæ duas incognitas comprehendunt; cujuſmodi ſunt illæ, per quas linearum natura definitur. Quare conſequens eſt, ut nullo quidem ſolido fundamento Carteſius genera linearum duabus dimenſionibus a ſe mutuo diſtinxerit.

44. Rectius igitur alii diſtinguunt linearum ordines a ſe invicem unica tantum dimenſione. Quem in finem vocant lineas primi ordinis, quæ æquationibus ſimplicibus, ac unius dimenſionis

definiuntur. Vocant lineas ſecundi ordinis, quarum æquationes ad duas dimenſiones aſcendunt. Vocant lineas tertii ordinis, quarum æquationes ad tres dimenſiones aſſurgunt; atque ita deinceps. Qua ratione dicendæ erunt lineæ ordinis infiniteſimi, quas Carteſius mechanicas appellavit: quippe quæ * æquationibus, ad infinitas dimenſiones aſcendentibus, definiuntur.

* Art. 37.

45. Ut autem ſuo loco oſtendemus, in lineis ordinis primi, nulla curva, ſed ſola recta continetur. Unde, ſi curvarum genera ſunt diſtinguenda, erunt curvæ primi generis, quarum æquationes quadratum, vel rectangulum duarum incognitarum non excedunt; erunt curvæ ſecundi generis, quæ æquationibus definiuntur trium dimenſionum; erunt curvæ tertii generis, quarum æquationes ad quatuor dimenſiones aſcendunt; atque ita deinceps. Unde etiam erunt curvæ generis infiniteſimi, in quibus æquationes ad infinitas quidem dimenſiones aſſurgunt.

46. Cæterum Veteres, ſicuti problematum geometricorum tria genera diſtinguebant, plana, ſolida, ac linearia; ſic lineas omnes, quibus problematum fiunt conſtructiones, ad tres claſſes pariter revocabant. Prima etenim erat illarum, per quas plana problemata ſolvuntur; eaque nonniſi rectam, ac circuli circumferentiam continebat. Secunda complectebatur coni ſectiones, quas ad conſtructionem problematum ſolidorum oportet aſſumere. Et tertia demum omnes alias lineas magis compoſitas, quæ conſtructioni problematum linearium inſerviunt.

47. Revocabant porro ad tertiam hanc claſ-

lem

ſem, non modo omnes alias lineas geometricas, ut ciſſoidem Dioclis, conchoidem Nicomedis, verum etiam lineas mechanicas, ut quadratricem Dinoſtrati, ſpiralem Archimedis. Qua in re non adeo ii velim arguantur. Nam ſicuti, ob differentias problematum linearium, non adhuc eis exploratas, unum eorum genus conſtituebant; ſic omnino neceſſe erat, ut in una eademque claſſe reponerent, tam lineas geometricas, quæ circuli circumferentiam, & coni ſectiones excedunt, quam lineas mechanicas, quæ cunctis natura ſua ſuperiores deprehenduntur.

48. Hinc, quod Carteſius antiquis Geometris vitio vertit, potius refellendo ejus errori appoſite nobis inſerviet. Ex eo enim, quod ſub eodem genere repoſuerint Veteres, tam ciſſoidem, & conchoidem, quam ſpiralem, & quadratricem; cenſuit, eos e Geometria rejeciſſe omnes alias curvas, quæ circuli circumferentia, & conicis ſectionibus magis compoſitæ eſſent. Sed crediderim, hanc eis ſententiam adſcripſiſſe, quia ipſe in ea erat opinione, ut ſpiralis, quadratrix, & ſimiles e Gemetria exules eſſe deberent: quam tamen vel ex eo exuere poterat, quod hujuſmodi lineas ad eandem claſſem cum curvis aliis geometricis ipſi Veteres revocabant.

V. *Locorum in genera diſtinctio, & enumeratio eorum, quæ ſunt primi, & ſecundi generis.*

49. Linearum ordinibus conſtitutis, facile modo erit, & ipſa loca geometrica, quæ lineis terminantur, in certa genera

diſpeſcere. Nimirum diſtinguenda ſunt genera locorum, pro variis ordinibus linearum, a quibus circumſcribuntur. Qua ratione erunt loca primi generis, quæ lineas primi ordinis pro ſuis terminis habent; erunt loca ſecundi generis, quæ terminantur lineis ordinis ſecundi; erunt loca tertii generis, quæ agnoſcunt ut ſuos terminos lineas ordinis tertii; atque ita deinceps.

50. Jam, ſi primum ordinem linearum excipias, in quo recta ſola continetur, omnes alii ordines varias ſub ſe lineas comprehendunt. Unde etiam loca omnia primi generis ſunt unius ejuſdemque ſpeciei; ſed non item loca, quæ ad genera alia referuntur: quippe quæ ſubdividuntur in plures ſpecies, pro varietate linearum, quæ ſub correſpondentibus ordinibus continentur: proindeque, niſi prius numerus linearum definiatur, quæ ſub unoquoque ordine comprehenduntur; haud quaquam ſpecies, in quas unumquodque genus locorum ſubdividi poteſt, recenſere licebit.

51. Quum autem in præſentiarum agendum nobis ſit dumtaxat de locis primi, & ſecundi generis; ſatis erit, definire hic numerum linearum, quæ ſub primo, & ſecundo ordine continentur. Et quidem primus ordo, ut ſæpius dictum eſt, rectam ſolam comprehendit. Ad ſecundum vero ordinem pertinent circulus, & curvæ illæ, quæ ex varia coni per planum ſectione ſuum ortum habentes, coni ſectiones paſſim appellantur. Unde, ſicuti unica eſt ſpecies locorum primi generis, ita loca generis ſecundi in tot ſpecies ſubdividere oportebit, quot una cum circulo coni ſectiones ſuppeditant.

52.

52. Plane vero ex varia coni per planum ſectione tres curvæ, a circulo diverſæ, erui poſſunt, quæ ſpeciatim dicuntur parabola, ellipſis, & hyperbola. Quare locorum ſecundi generis quatuor ſpecies dabuntur; eorumque alia erunt ad circulum, alia ad parabolam, alia ad ellipſim, & alia demum ad hyperbolam. Quumque hyperbola conſiderari poſſit, vel relate ad aliquam ejus diametrum, vel in ordine ad ſuas aſymptotos; hinc eſt, ut duæ locorum ad hyperbolam ſpecies communiter a Geometris diſtinguantur.

53. Cæterum, quod recta ſola conſtituit primum ordinem linearum, & ad ſecundum dumtaxat circulus, & coni ſectiones pertinent; id abunde patebit, quum de ipſa locorum primi, & ſecundi generis compoſitione agendum nobis erit. Nunc autem, ut horum locorum compoſitiones commode tradi poſſint, oſtendendæ ſunt nobis præcipuæ proprietates, quæ competunt lineis illis, quum ſingula earum puncta per rectas totidem parallelas ad puncta alia alterius rectæ, poſitione datæ, referuntur.

54. Et ad rectam quidem quod ſpectat, quid ei accidit, quum eo pacto ſub contemplationem venit, haud difficile erit definire. Primo enim, ſi ejus puncta omnia referantur ad puncta rectæ alterius, quæ ei ſit parallela; præcipuum ejus accidens hoc erit, ut omnes ejus ordinatæ, ſub quocumque angulo ducantur, inter ſe ſint æquales. Nam ordinatæ iſtæ, velut ſibi mutuo æquidiſtantes, conſtituunt parallelogramma totidem cum rectis illis. Quare, quum cujuſque parallelogrammi latera oppoſita ſint æqualia: plane neceſſe eſt, ut ordinatæ omnes inter ſe ſint æquales.

55. Quod ſi vero puncta ejuſdem rectæ referantur ad puncta alterius rectæ, quæ ei occurrat, & capiatur punctum occurſus, velut origo, ſeu principium abſciſſarum; tunc proprietas ejus præcipua hæc erit, ut omnes ipſius ordinatæ, ſub quocumque angulo ducantur, eandem ſervent rationem cum ſuis abſciſſis correſpondentibus; quandoquidem ordinatæ iſtæ, velut ſibi mutuo æquidiſtantes, triangula æquiangula cum rectis illis conſtituunt. Et quoniam, abeunte in infinitum puncto occurſus, abſciſſæ omnes fiunt æquales inter ſe; liquet rurſus, æquales eſſe debere cunctas ordinatas, quum puncta rectæ, de qua agitur, ad puncta alterius rectæ, quæ ei ſit parallela, referuntur.

56. Quantum ad circuli circumferentiam, ſicuti ejus puncta omnia æqualiter diſtant a puncto illo, quod ipſius centrum appellatur; ita, ſi eadem illa puncta referantur ad puncta alicujus diametri, & capiantur velut ordinatæ perpendiculares, quæ ad eam diametrum demittuntur, fiet quadratum cujuſque ordinatæ æquale rectangulo, quod ſub correſpondentibus diametri portionibus continetur. Poſſunt autem ejuſdem circumferentiæ puncta referri, ſive ad puncta diametri per ordinatas obliquas, ſive ad puncta cujuſvis alterius rectæ, poſitione datæ, per quaſvis rectas parallelas. Sed ex cognita illa relatione facile erit, adhibito calculo, omnes has alias eruere, ac definire.

57. Superſunt coni ſectiones. Verum, quæ iis accidunt, ubi puncta ipſarum ad puncta cujuſvis rectæ, poſitione datæ, per parallelas totidem referuntur, non prius definire licebit, quam

co-

cognita geneſi, ac natura talium linearum. Et quamquam id præſtitum ſit a nobis in Elementis, quæ de conicis ſectionibus conſcripſimus; attamen, ne aliunde deſumere cogamur, quæ hic neceſſaria judicamus, non gravabimur ea, qua fieri poteſt, brevitate, tum ortum talium linearum, cum earundem naturam, ac præcipuas proprietates oſtendere.

CAPUT II.

Geneſis, & natura ſectionum conicarum:

58. POſtquam noverint Veteres, non omnia Geometriæ problemata circuli, & rectæ lineæ interſectione poſſe reſolvi; ſtatim ad excogitandas curvas alias animum converterunt. Quas autem primo conſideraverunt, ſunt conicæ ſectiones, hoc eſt eæ, quæ ex coni per planum ſectione oriuntur. Et quamquam non ſatis conſtet, qui primus inter Veteteres in earum contemplationem devenerit; attamen, ſi qua fides Pappo, ſcripſit de iis quatuor libros Euclides, quos quum expleviſſet Apollonius Pergæus, alioſque totidem adjeciſſet, octo conicorum libri confecti.

I. *Coni origo, & duplex eum ſecandi ratio.*

59. QUum conicæ ſectiones ex cono trahant originem ſuam, ratio poſtulat, ut geneſim illius ſolidi, quod conus appellatur, in primis oſtendamus. Sane Eucli-

des

des eam univerſaliter non tradidit. Nam voluit oriri conum, quando, rectanguli trianguli manente uno crurum, circumducitur crus alterum, donec redeat ad priorem locum. Primus Apollonius ad ſuam univerſalitatem illam evexit. Enim vero docuit conum oriri, quando recta, ex ſublimi, ac manente puncto ad circuli circumferentiam demiſſa, eam integre percurrit.

60. Hac ſiquidem geneſi Apollonius, non modo conum Euclidæum, quem vocavit rectum, verum etiam conum alium obtinuit, quem obliquum, ſeu ſcalenum appellavit. Ut enim impoſuit nomen verticis puncto illi ſublimi, ac immoto, nomen baſis plano ipſius circuli, & nomen axis rectæ, conjungenti verticem cum centro baſis; ſic conſideravit, poſſe axem iſtum cum plano baſis, tum rectos, cum obliquos angulos conſtituere. Itaque, quum ei inſiſtit ad rectos angulos, conum vocavit rectum; ubi vero inſiſtit ad angulos obliquos, obliquum, ſeu ſcalenum eundem conum vocitavit.

61. Patet autem, conum in infinitum augeri, ſi recta, quæ ex ſublimi puncto ad circuli circumferentiam ducitur, producatur inferius in infinitum. Et, ſi eadem recta extendatur quoque ſuperius; tunc deſcribetur conus alter, cujus idem erit vertex, idemque pariter axis cum cono priore. Quumque horum conorum unus alteri opponatur; hinc factum, ut idem Apollonius conos oppoſitos eos appellaverit: ubi tamen ſedulo notandum, quod, ut tali nomine duo coni deſignentur, haud quidem ſatis eſt, eos eundem verticem, eundemque axim habere; ſed neceſſe eſt quoque, ut per eandem rectam

ctam ambo ſimul deſcribantur.

62. Ex ipſa porro coni generatione ultro ſequitur, rectam, conjungentem duo puncta conicæ ſuperficiei eſſe in ipſa ſuperficie conica, quum producta tranſit per verticem, & cadere intra ſuperficiem, ubi ad verticem non pertinet. Eſto etenim conus ABC, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD. Capiantur in ejus ſuperficie duo puncta F, & G; & recta FG, ea conjungens, tranſeat primum per verticem A. Si fieri poteſt, cadat recta iſta, vel intra, vel extra ſuperficem conicam. Et quoniam recta, quæ eam ſuperficiem deſcribit, revolutione ſua tranſit per omnia puncta ejus; tranſibit quoque per punctum F. Quare duarum rectarum erunt iidem termini: quod ſane fieri non poteſt. FIG. 3.

63. Non tranſeat modo per verticem A recta FG, quæ conjungit duo puncta F, & G, ſumpta in ſuperficie conica. Jungantur rectæ AF, AG. Quumque iſtæ jam ſint * in conica ſuperficie; eædem productæ occurrent circumferentiæ baſis in duobus punctis B, & C. Quare, quum recta BC ſit intra circulum; erit triangulum BAC intra conicam ſuperficiem. Eſt autem recta FG in plano trianguli BAC. Et igitur eadem recta FG intra conicam ſuperficiem erit: proindeque, ſicuti recta FG jacet in ſuperficie conica, ubi producta tranſit per verticem; ita cadet intra eandem ſuperficiem, ubi ad verticem non pertinet. FIG. 4. *art. 62.

64. Jam conus plano bifariam ſecari poteſt, primo nempe per verticem, & deinde per alium a vertice locum. Quum conus ſecatur plano per ver-

verticem, fient in ejus ſuperficie binæ lineæ rectæ. FIG. 3. Sit enim conus ABC, qui ſecetur plano tranſeunte per verticem. Et jam, ſi B, & C ſint alia duo puncta, in ſuperficie conica a plano ſignata; junctis rectis AB, AC, erunt iſtæ in plano ſecante. Sed eædem, quum ad verticem pertineant, ſunt etiam * in ſuperficie conica. Quare erunt communes ſectiones plani ſecantis, & conicæ ſuperficiei: proindeque, ſecto cono plano per verticem, fient in ejus ſuperficie binæ lineæ rectæ.

* art. 62.

65. Quotieſcumque autem planum, conum ſecans, per verticem non tranſit; ſectio, facta in ſuperficie coni, curva linea erit. Secetur enim FIG. 4. idem conus ABC plano, non tranſeunte per verticem; ſitque FGH communis ſectio plani ſecantis, & conicæ ſuperficiei. Si fieri poteſt, ſit vel ipſa, vel aliqua ejus portio recta, & non curva. Et quoniam ea exiſtit in plano ſecante, quod per verticem non tranſit; utique nec etiam ipſa pertinebit ad verticem. Itaque cadet * intra ſuperficiem conicam; nec ideo erit communis ſectio plani ſecantis, & conicæ ſuperficiei; quod eſt contra hypotheſim.

* art. 63.

66. Cæterum, quemadmodum, quum conus plano per verticem ſecatur, fiunt in ejus ſuperficie duæ lineæ rectæ; ita communis ſectio coni cum plano, per verticem tranſeunte, & occurrente plano baſis, triangulum erit. Secetur FIG. 3. ſiquidem conus ABC plano, tranſeunte per verticem; ſintque AB, AC binæ lineæ rectæ, quæ fiunt in ejus ſuperficie. Et quoniam planum ſecans occurrit plano baſis in recta BC; liquet, BAC triangulum eſſe. Eſt autem BAC communis

munis ſectio coni cum plano. Itaque, quum conus ſecatur plano, tranſeunte per verticem, & occurrente plano baſis; ſectio, facta in cono, triangulum erit.

67. Sed notetur hoc loco velim, quod ſi planum, ſecans conum, tranſeat quoque per axem; tunc recta, in qua illud occurrit plano baſis, erit iſtius diameter aliqua: proindeque triangulum, per axem ſectum, ſuper aliqua baſis diametro ſemper inſiſtet. Viciſſim autem, ſi triangulum, ex cono ſectum, inſiſtat ſuper aliqua baſis diametro; planum ejus tranſibit per axem. Nam aliter, ducta in eo plano recta a vertice coni ad centrum baſis, forent hujus, & axis iidem termini: quod plane repugnat.

II. *Quot ſpecies curvarum ex coni ſectione eruere licet.*

68. VIdimus *, ſectionem, factam in ſuperficie conica, eſſe lineam curvam, quum planum, per quod diſpeſcitur conus, non tranſit per verticem. Interim hæc curva non ſemper ejuſdem ſpeciei eſt; ſed, pro varia plani poſitione, varias induit formas. Itaque, ut ſingulæ ſpecies curvarum, quas ex cono eruere licet, perſpectæ nobis evadant; notabimus ulterius, quod ubi planum, conum ſecans, non tranſit per verticem, poteſt, vel occurrere plano baſis, vel eidem æquidiſtare. *art. 65.

69. Quum ſecatur conus plano, æquidiſtante plano baſis, ſectio circulus fiet; nec alterius naturæ erit, ſi non ipſe conus principalis, ſed ejus oppoſitus plano, ſubinde ducto, ſecetur. Ut vero

FIG. 4. ro id oſtendamus, ſit conus ABC, & vel ipſe, vel ejus oppoſitus ſecetur plano, æquidiſtante plano baſis BCD. Sit autem FGH communis ſectio coni cum plano. Dico, ſectionem iſtam circulum eſſe, ejuſque centrum reperiri in axe coni AK.

70. Ducatur per axem planum aliud, faciens triangulum BAC. Et jam communes ſectiones ejus cum planis æquidiſtantibus, nimirum rectæ BC, FG, parallelæ erunt inter ſe. Atque ita quoque, ducto per axem alio quovis plano DAK, parallelæ erunt DK, HL. Hinc, quum triangula AKB, AKC, AKD æquiangula ſint cum aliis triangulis ALF, ALG, ALH; erit, ut AK ad AL, ita BK ad FL, ita CK ad GL, & ita DK ad HL: proindeque rectæ BK, CK, DK proportionales erunt rectis FL, GL, DL; adeoque, ſicuti BK, CK, DK inter ſe ſunt æquales, ſic etiam æquales erunt FL, GL, HL.

71. Similiter autem oſtendemus, æquales inter ſe eſſe rectas omnes, quæ in ſectione FGH pertinent ad punctum L. Quare ſectio ipſa FGH circulus erit, ejuſque centrum erit punctum L, quod reperitur in axe coni AK. Id vero quum ita ſit, liquet, planum, baſi æquidiſtans, non tam conum ſecare, quam illum reſtituere. Nam ea portio coni, quæ ad verticem pertinet, quum circulum pro baſi habeat, adhuc conus dicendus erit.

72. Quod ſi planum, per quod diſpeſcitur conus, occurrat plano baſis; tunc duo quidem contingere poſſunt. Nam, producto plano una cono, vel rurſus planum ex cono egreditur, vel ſemper jacet intra eum. In primo caſu curva,

quæ

quæ gignitur in ſuperficie conica, redibit in orbem, & ſpatium claudet. In ſecundo autem caſu curva, quæ ibidem producitur, abibit in infinitum una cum cono.

73. *Sed*, plano intra conum continuo jacente, duo adhuc caſus ſunt diſtinguendi. Producto enim plano ſuperius, vel ſecatur quoque conus oppoſitus, vel ei nequaquam occurritur. Quum primum contingit, in utriuſque coni ſuperficie producitur curva, quæ in infinitum extenditur. Ubi vero alterum accidit, dumtaxat in ſuperficie coni principalis curva, in infinitum progrediens, generatur.

74. Jam curva, quæ abit in infinitum, quum nullam aliam in adverſo cono oppoſitam habet, vocabitur *parabola*. Sed, quum ei in cono oppoſito alia adverſatur, tam ipſa, quam ejus adverſa, dicetur hyperbola. Et denique curva illa, quæ redit in orbem, quæque producitur plano, utrinque ex cono egrediente, ſi circuli circumferentia non ſit, ellipſis appellabitur.

75. Eſt autem circumferentia circuli in unico tantum caſu, qui obtinet etiam in ſolo cono ſcaleno. Agnovit hunc caſum ipſe coni ſcaleni auctor Apollonius; & ſectionem, per quam ei ſit locus, vocavit ſubcontrariam. Habetur vero iſtiuſmodi ſectio, quum, tam ejus planum, quam planum baſis triangulo, per axem ſecto, normale eſt, ex quo etiam triangula ſimilia a planis illis abſcinduntur. Et circulum eſſe ſectionem iſtam, alibi quidem oſtendemus.

76. Cæterum Apollonius, ad eruendas has curvas ex cono, triangulum adhibebat per axem ſectum, tumque conum ſecabat plano, quod occur-

curreret plano baſis in recta, quæ normalis eſſet baſi ejus trianguli. In cono etenim ABC fiat
FIG. 5. 6. primo triangulum per axem BAC; deinde ſece-
7. tur idem conus plano alio, occurrente plano baſis BCD in recta DE, quæ perpendicularis ſit ad baſim ejus trianguli BC. Jamque ſectio, orta in ſuperficie coni, DFE unamquamque earum curvarum poterit nobis exhibere.

77. Eſto namque recta FG communis ſectio planorum BAC, DFE. Et ſiquidem ea ponatur primo parallela lateri AC, fiet ſectio DFE
FIG. 5. parabola; quum planum jaceat ſemper intra conum, nec conum oppoſitum ſecet. Quod ſi vero occurrat lateri AC ſupra verticem coni, ſectio erit hyperbola; quandoquidem planum jacet ſemper intra conum, & ſecat etiam conum oppoſitum. Et denique ſi conveniat cum latere
FIG. 6. (placed beside "ro occurrat")
FIG. 7. AC infra verticem coni, ſectio erit ellipſis; quum planum ſecans utrinque ex cono egrediatur.

78. Quod ſi in cono jam facta ſit ſectio; & quæratur triangulum per axem, ad quod eam exigit Apollonius; facile quidem erit, illud
FIG. 5. 6. exhibere. Eſto enim DFE ſectio, facta in co-
7. no. Sane nihil obſtat, quominus in baſi BCD talis diameter ducatur, quæ ipſi DE ad rectos angulos inſiſtat. Sit ergo BC diameter iſta; & triangulum, per axem ſectum, quod ei inſiſtit, illud erit, quod quæritur. Nam ex ipſa conſtructione baſi ejus BC perpendicularis eſt recta DE, in qua planum ſectionis DFE occurrit plano baſis BCD.

III.

III. *Quæ recta ſit ſectionis conicæ diameter, & qui vertices ejus.*

79. Cujuſcumque ſpeciei ſit ſectio conica, ſi fiat in cono triangulum illud per axem, ad quod eam Apolloniana geneſis exigit, dicetur diameter ſectionis recta illa, quæ eſt communis ſectio trianguli, & plani ſecantis. Ita, ſi DEF ſit ſectio conica, & BAC triangulum, per axem ſectum, ad cujus baſim BC normalis eſt recta DE; vocabimus diametrum ſectionis DFE rectam FG, in qua duo plana BAC, DFE ſeſe mutuo ſecant. FIG. 5. 6. 7.

80. Sortita eſt autem recta iſta FG diametri nomen, quia tranſit velut per medium ipſius ſectionis, eamque in duas partes æquales diſpeſcit. Ut enim ex conſtructione biſecat in K rectam DE, ita quoque dividit bifariam rectas omnes, quæ, ipſi DE æquidiſtantes, utrinque ad ſectionem terminantur. Sit namque HI una iſtarum rectarum, quam ſecet in L recta FG. Jamque, ſi per punctum L ducatur recta MN, ipſi BC parallela; fiet huic MN perinde HI normalis, ac eſt DE perpendicularis ſuper BC.

81. Secetur nunc conus plano, tranſeunte per rectas MN, HI. Et quoniam ſectione iſta oritur * circulus MNH, cujus diameter eſt recta MN; eadem HI, non modo inſiſtet ad angulos rectos ſuper MN, ſed bifariam quoque ab ipſa ſecabitur. Quare etiam a recta FG biſecta erit in L. Patet autem, eandem demonſtrationem obtinere, ſi ſectio DFE ſit hyperbola, & recta HI ducta ſit in ejus oppoſita, æquidiſtanter ipſi DE. FIG. 6.

* art. 69.

Unde recta FG erit utriuſque hyperbolæ diameter, & in utraque dividet bifariam rectas omnes, quæ, ipſi DE æquidiſtantes, utrinque ad ſectionem terminantur.

82. Jam, ſicuti recta FG, quæ communis eſt ſectio plani ſecantis, & trianguli, vocatur diameter ſectionis DFE, ita punctum F, in quo eadem FG ſectioni occurrit, diametri vertex appellatur. Quum autem ellipſis in orbem redeat, occurret ei diameter in duobus punctis; adeoque duo erunt vertices ipſius. Similiter vero in hyperbola, ob aliam oppoſitam, quæ continuo illam comitatur, duo erunt diametri vertices. Et, quemadmodum in ellipſi diameter non majorem longitudinem habere poteſt, quam, quæ ei ab utroque vertice conceditur; ſic etiam in hyperbola, ubi quæſtio eſt de longitudine diametri, ea tantum ipſius portio venit, quæ utroque vertice continetur.

83. Tantum igitur in parabola, ob unicum diametri verticem, nequit ei longitudo ulla præſcribi. Verum, ſi intimius rem inſpiciamus, comperiemus in hac curva verticem alium in infinita a priore diſtantia; unde ipſa ejus diameter velut infinitæ longitudinis erit habenda. Neque enim alia ratione, tam in ellipſi, quam in hyperbola, ſortitur diameter FG verticem alium, quam, quia in utraque curva occurrit etiam lateri AC. Quum autem rectæ parallelæ conſiderari poſſint, velut concurrentes in infinita diſtantia; concipere licebit hunc alium occurſum in parabola, ubi a puncto F infinite receditur.

84. Et ſane, tam ellipſis, quam hyperbola vertitur in parabolam, quum, altero diametri

ver-

vertice G in infinitum abeunte, ſit ipſa diameter FG infinitæ longitudinis. Neque enim punctum G in infinitum abire poteſt, niſi diameter FG æquidiſtans fiat ipſi AC. Hinc conſiderari poterit parabola, tam ut ellipſis, quam ut hyperbola, cujus diameter ſit infinitæ longitudinis. Et, vel hac ſola conſideratione, poterunt parabolæ proprietates omnes ex iis derivari, quæ ſive ad ellipſim, ſive ad hyperbolam pertinent: nimirum ſedulo perpendendo, quid in ea, de qua agitur, proprietate infinita diametri longitudo mutet, ac innovet. FIG. 6. 7.

85. Quemadmodum autem ellipſis vertitur in parabolam, quum, altero diametri vertice G in infinitum abeunte, ſit diameter ipſa FG infinitæ longitudinis; ſic eadem ellipſis tranſit in circulum, quum abeunte in infinitum puncto K, in quo rectæ duæ FG, BC ſibi mutuo occurrunt, evadit diameter FG parallela ipſi BC. Nam, una cum puncto K, abit in infinitum recta DE, quæ communis eſt ſectio plani ſecantis cum plano baſis. Unde, quum duo iſta plana conveniant inter ſe in infinita diſtantia, ipſa quoque evadent parallela. Hinc ſecabitur conus plano, æquidiſtante baſi: & propterea ipſa ſectio circulus erit. FIG. 7.

86. Id quum ita ſit, poterit circulus, velut ſpecies quædam ellipſis, haberi. Et revera, prout ex cono oritur, eſt prima infinitarum variationum, quas in eo ſubit ellipſis. Sicuti enim, ſecto cono plano, æquidiſtante baſi, producitur circulus; ſic, inclinato paululum plano verſus baſim, fit ſtatim locus ellipſi, cujus, pro infinitis inclinationibus diverſis plani ſecantis, infi-

nita quoque diverſitas datur. Ultima autem omnium variationum parabola eſt, quæ tamen haberi debet, velut prima ex infinitis variationibus, quibus in cono ſubjacet hyperbola. Quumque hyperbola deſinat demum in lineam rectam; hæc quoque, velut ultima hyperbolarum, poterit conſiderari.

87. Cæterum, quum in qualibet coni ſectione, non ſecus ac in circulo, adſit diameter aliqua, quæ biſecat rectas quaſdam parallelas, utrinque ad ſectionem terminatas; referre licebit puncta ipſius ſectionis ad puncta diametri, & ſumere, velut ordinatas, ſemiſſes earum rectarum, quæ bifariam a diametro dividuntur; & velut abſciſſas, diametri portiones, quæ vertice, & ordinatis continentur. Quæ itaque accidunt coni ſectionibus, quum hac ratione ſub contemplationem veniunt; oſtendendum nunc nobis breviter erit.

IV. *Quid ellipſi accidat relate ad diametrum, oſtenditur.*

88. UBi ellipſis puncta omnia ad ejus diametrum referuntur, & capiuntur, velut ordinatæ, ſemiſſes earum rectarum, quæ ab ipſa diametro biſecantur; præcipuum ipſius accidens hoc erit, ut quadrata ordinatarum ſint, veluti rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur. Ut id oſtendamus, fiat in cono ABC ſectio elliptica DFE; & ad diametrum ejus FG, quæ utrique laterum trianguli, FIG. 7. per axem ſecti, infra coni verticem occurrit, du-

can-

cantur duæ ordinatæ DK , HL . Oſtendendum eſt ergo, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

89. Quemadmodum ordinata DK eſt in plano circuli BCD , ſic fiat in cono circulus alter MNH , in cujus plano exiſtat ordinata altera HL . Et quoniam diametris horum circulorum BC , MN inſiſtunt ad rectos angulos ordinatæ DK , HL ; erunt iſtarum quadrata æqualia rectangulis BKC , MLN . Quare erit , ut DK quadratum ad HL quadratum , ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN . Sed rectangulum BKC eſt ad rectangulum MLN in ratione compoſita ex BK ad ML , & ex CK ad NL ; ſive etiam ex FK ad FL , & ex GK ad GL; hoc eſt, componendo has rationes, ut rectangulum FKG ad rectangulum FLG . Itaque erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum , ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

90. Hinc, ſi ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela , talis longitudinis , ut quadratum unius ordinatæ DK ſit ad rectangulum ei correſpondens FKG , veluti eſt FO ad FG; erit in hac eadem ratione quadratum cujuſvis alterius ordinatæ HL ad rectangulum FLG, quod ei correſpondet. Nam, ſicuti oſtenſum eſt*, DK quadratum eſſe ad HL quadratum , ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG ; ſic erit, permutando, ut DK quadratum ad rectangulum FKG , ita HL quadratum ad rectangulum FLG . Vocatur autem recta iſta FO diametri parameter. Et, ejus habita ratione, erit, ut parameter ad diametrum , ita quadratum cujuſvis ordinatæ ad rectangulum , quod ſub corre- *art. 88.

ſpondentibus diametri portionibus continetur.

91. Quod, ſi parametri extremitas O jungatur cum vertice altero G per rectam GO, cui occurrat in R ordinata quævis DK; erit porro quadratum hujus ordinatæ DK æquale correſpondenti rectangulo FKR. Nam rectangulum FKR eſt ad rectangulum FKG, ut KR ad
*art. 90. KG; ſive etiam, ut FO ad FG. Sed * FO eſt ad FG, ut DK quadratum ad rectangulum FKG. Quare erit, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita rectangulum FKR ad idem rectangulum FKG: & propterea quadratum ordinatæ DK rectangulo FKR æquale erit.

92. Quum autem rectangulum FKR minus ſit rectangulo OFK, etiam quadratum ordinatæ DK deficiet a rectangulo OFK. Unde ſortita eſt hujuſmodi ſectio nomen ellipſis, quia in ea quadratum cujuſvis ordinatæ deficit a rectangulo, quod fit ex parametro in abſciſſam correſpondentem. Sed, ducta RS, ipſi FG parallela, liquet, defectum eſſe rectangulum aliud OSR, quod, inſiſtens eidem abſciſſæ FK, ſive RS, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex parametro FO in diametrum FG.

93. Quæ porro in ellipſi ſit ratio parametri ad diametrum, poteſt per rectas, in cono ductas,
*art. 90. facili negotio definiri. Jam enim FO eſt * ad FG, ut DK quadratum, vel ei æquale rectangulum BKC, ad rectangulum FKG. Sed rectangulum BKC eſt ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad GK; hoc eſt, ducta AX, ipſi FG parallela, in ratione compoſita ex BX ad AX, & ex CX ad AX; ſive etiam, componendo has rationes, ut rectangulum BXC

ad

ad AX quadratum. Itaque erit, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

94. Id vero quum ita ſit, fiet parameter FO æqualis diametro FG, ubi rectangulum BXC æquale erit quadrato ex AX; hoc eſt, quum fuerit, ut BX ad AX, ita AX ad CX; ſive etiam, quum angulus BAX, vel BFG æqualis extiterit angulo ACX. Verum, ubi æquales ſunt duo iſti anguli, erunt pariter æquales anguli duo AFG, ACB; & conſequenter duo triangula FAG, CAB ſimilia erunt. Quare in ellipſi ratio parametri ad diametrum erit æqualitatis, quum ejus diameter FG abſcindit triangulum FAG, ſimile triangulo CAB: quod, perſpicuum eſt, in ſolo cono ſcaleno poſſe locum habere; quum in cono recto triangulum CAB ſit ſemper iſoſceles.

95. Atque hinc modo liquet, ſectionem coni ſcaleni, quam Apollonius vocavit ſubcontrariam, circulum eſſe debere. Jam enim in hac ſectione ad planum trianguli BAC rectum * eſſe debet, tam planum baſis BCD, quam planum ſecans DFE. Quare ordinatæ DK, HL perpendiculares erunt diametro FG. Sed pro eadem ſectione neceſſe eſt * quoque, ut ſimilia ſint triangula FAG, CAB. Quare ratio parametri ad diametrum fiet æqualitatis: & propterea quadratum cujuſque ordinatæ perpendicularis æquale erit rectangulo, ſub correſpondentibus diametri portionibus contento: quæ eſt proprietas notiſſima circuli.

* art. 75.

* art. 75.

V. *Quid competat hyperbolæ relate ad diametrum, aperitur.*

96. Similiter, quum hyperbolæ puncta omnia ad ejus diametrum referuntur, & capiuntur, velut ordinatæ, ſemiſſes earum rectarum, quæ ab ipſa diametro biſecantur; præcipuum ipſius accidens hoc erit, ut quadrata ordinatarum ſint, veluti rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur. Ut id oſtendamus, fiat in cono ABC ſectio hyperbolica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ trianguli, per axem ſecti, unum quidem latus infra coni verticem, alterum ſupra verticem ſecat, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Oſtendendum eſt ergo, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

FIG. 6.

97. Quemadmodum ordinata DK eſt in plano circuli BCD, ſic fiat in eodem cono circulus alter MNH, in cujus plano exiſtat ordinata altera HL. Et quoniam diametris horum circulorum BC, MN inſiſtunt ad rectos angulos ordinatæ DK, HL; erunt iſtarum quadrata æqualia rectangulis BKC, MLN: proindeque erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN. Sed rectangulum BKC eſt ad rectangulum MLN in ratione compoſita ex BK ad ML, & ex CK ad NL; ſive etiam ex FK ad FL, & ex GK ad GL; hoc eſt, componendo has rationes, ut rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Itaque erit

erit, ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

98. Perſpicuum eſt autem, eandem demonſtrationem obtinere quoque, ſi binæ illæ ordinatæ ducantur in hyperbola oppoſita; aut etiam, ſi una ex iis ordinatis ducatur in hyperbola principali, & altera in ejus adverſa. Unde, ſicuti eadem eſt* utriuſque hyperbolæ diameter, & eadem poſitio ordinatarum, hoc eſt earum rectarum, quæ bifariam a diametro dividuntur; ita, relate ad utramque hyperbolam, affirmare licebit, quod quadrata ordinatarum ſervant inter ſe eandem rationem, quam habent rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur. *art. 91.

99. Hinc, ſi ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK ſit ad rectangulum ei correſpondens FKG, veluti eſt FO ad FG; erit in hac eadem ratione quadratum cujuſvis alterius ordinatæ HL ad rectangulum ſuum FLG. Nam, ſicuti oſtenſum eſt*, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG; ſic erit, permutando, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita HL quadratum ad rectangulum FLG. Vocatur autem recta iſta FO diametri parameter. Et, ejus habita ratione, erit, ut parameter ad diametrum, ita quadratum cujuſvis ordinatæ ad rectangulum, quod ſub correſpondentibus diametri portionibus continetur. *art. 96.

100. Quod ſi parametri extremitas O junga-

gatur cum vertice altero G per rectam GO, cui productæ occurrat in R ordinata quævis DK; erit porro quadratum hujus ordinatæ DK æquale correſpondenti rectangulo FKR. Nam rectangulum FKR eſt ad rectangulum FKG, ut KR ad KG; ſive etiam, ut FO ad FG. Sed * FO eſt ad FG, ut DK quadratum ad rectangulum FKG. Quare erit, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita rectangulum FKR ad idem rectangulum FKG: & propterea quadratum ordinatæ DK rectangulo FKR æquale erit.

*art. 99.

101. Quum autem rectangulum FKR majus ſit rectangulo OFK; etiam quadratum ordinatæ DK excedet rectangulum OFK. Unde ſortita eſt hujuſmodi ſectio nomen hyperbolæ, quia in ea quadratum cujuſvis ordinatæ excedit rectangulum, quod fit ex parametro in abſciſſam correſpondentem. Sed, ducta OS, ipſi FG parallela, liquet, exceſſum eſſe rectangulum aliud OSR, quod inſiſtens eidem abſciſſæ FK, ſive OS, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex parametro FO in diametrum FG.

102. Quæ porro in hyperbola ſit ratio parametri ad diametrum, poteſt per rectas, in cono ductas, facili negotio definiri. Jam enim FO eſt * ad FG, ut DK quadratum, vel ei æquale rectangulum BKC, ad rectangulum FKG. Sed rectangulum BKC eſt ad rectangulum FKG in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad GK; hoc eſt, ducta AX, ipſi FG parallela, in ratione compoſita ex BX ad AX, & ex CX ad AX; ſive etiam, componendo has rationes, ut rectangulum BXC ad AX quadratum. Itaque erit, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

*art. 99.

103.

103. Id vero quum ita ſit, fiet parameter FO æqualis diametro FG; ubi rectangulum BXC æquale erit quadrato ex AX; hoc eſt, quum fuerit, ut BX ad AX, ita AX ad CX. Hujuſmodi autem hyperbola, in qua diameter parametrum ſuam adæquat, communiter a Geometris vocatur æquilatera. Et quamquam æqualitas iſta etiam in ellipſi locum habere poſſit; hæc tamen non ſortitur nomen ellipſis æquilateræ, niſi ei illud etiam accedat, ut ordinatæ rectos cum diametro angulos conſtituant. Nam ellipſis æquilatera, quæ hyperbolæ æquilateræ adamuſſim correſpondeat, eſt ipſe circulus.

VI. *Quæ ſit parabolæ natura relate ad diametrum, explicatur.*

104. RElìquum jam eſt, ut quid accidat parabolæ, ubi ejus puncta omnia ad ſuam diametrum referuntur, & capiuntur, velut ordinatæ, ſemiſſes earum rectarum, quæ a diametro ipſa biſecantur, paucis aperiamus. Nimirum, quum illa hac ratione ſub contemplationem venit, præcipuum ejus accidens hoc eſt, ut quadrata ordinatarum eandem cum abſciſſis correſpondentibus ſervent rationem. Ut id oſtendamus, fiat in cono ABC ſectio parabolica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ uni laterum trianguli, per axem ſecti, debet eſſe parallela, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Oſtendendum eſt ergo, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt abſciſſa FK ad abſciſſam FL. Fig. 5.

105. Quemadmodum ordinata DK eſt in plano circuli BCD, ſic fiat in eodem cono circu-

culus alter MNH, in cujus plano exiſtat ordinata altera HL. Et quoniam diametris horum circulorum BC, MN inſiſtunt ad rectos angulos ordinatæ DK, HL; erunt iſtarum quadrata æqualia rect.ngulis BKC, MLN: proindeque erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN. Sed, propter æquales CK, NL, rectangulum BKC eſt ad rectangulum MLN, ut BK ad ML; ſive etiam, ut FK ad FL. Itaque erit, ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita FK ad FL.

106. Hinc, ſi ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK ſit æquale correſpondenti rectangulo OFK; erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ HL æquale pariter ſuo rectangulo OFL. Nam, ſicuti

*art.104. oſtenſum eſt *, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt FK ad FL; ita, aſſumpta communi altitudine FO, erit etiam DK quadratum ad HL quadratum, ut eſt rectangulum OFK ad rectangulum OFL. Vocatur autem recta iſta FO diametri parameter. Et, quemadmodum, ejus habita ratione, fit quadratum cujuſvis ordinatæ æquale rectangulo ex parametro in abſciſſam correſpondentem; ita, ob æqualitatem iſtam, ſortita eſt parabolæ nomen hujuſmodi ſectio.

107. Sed videamus modo, qua ratione proprietates ellipſis, & hyperbolæ vertantur in eas, quæ parabolæ competunt, ubi earum curvarum diameter evadit infinita. Nimirum primo, tam

*art. 88. 96. in ellipſi, quam in hyperbola eſt *, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG

ad

ad rectangulum FLG. Jam vero, abeunte in infinitum puncto G, duæ HG, LG ſumi poſſunt, velut æquales inter ſe; & conſequenter ratio rectangulorum FKG, FLG fit æqualis ei, quam habet FK ad FL. Quare omnino neceſſe eſt, ut in parabola DK quadratum ſit ad HL quadratum, veluti eſt FK ad FL. FIG. 6. 7.

108. Deinde in utraque etiam earum curvarum quadratum cujuſvis ordinatæ DK eſt * ad correſpondens rectangulum FKG, ut FO ad FG; ſive, aſſumpta communi altitudine FK, ut rectangulum OFK ad rectangulum KFG. Sed, ubi punctum G abit in infinitum, rectangula duo FKG, KFG ſumi poſſunt, velut æqualia inter ſe. Quare in parabola etiam DK quadratum æquale fiet rectangulo OFK. Id vero conſequitur quoque ex poſtrema earum curvarum proprietate, ratione cujus DK quadratum eſt * æquale rectangulo FKR. Nam, in infinitum abeunte puncto G, trapetium OFKR vertitur in parallelogrammum; atque adeo latera ejus oppoſita FO, KR evadunt æqualia.

* art. 90. 99.

* art. 91. 100.

109. Denique in parabola, quum parameter ſit finita, diameter autem infinitæ longitudinis; ratio parametri ad diametrum debet eſſe infinite parva. Plane vero finita illa ratio, quam vidimus ſuperius * obtinere in ellipſi, & hyperbola, talis evadit, ubi punctum G in infinitum abire ſupponitur. Nam in hac hypotheſi duæ FG, AC parallelæ fiunt inter ſe. Quare recta AX, quæ ducitur per punctum A ipſi FG æquidiſtanter, cadet ſuper AC. Unde, evaneſcente portione CX, evaneſcet pariter rectangulum BXC; & conſequenter ratio ejus rectanguli ad

* art. 93. 102.

AX quadratum infinite parva prodibit.

110. Cæterum in parabola, pro determinanda parametri longitudine, ſubrogare licebit hoc aliud theorema: nimirum, quod FO eſt
FIG. 5. ad AF, ut BC quadratum ad rectangulum BAC. Nam, quum eidem DK quadrato æquale ſit, tam rectangulum BKC, quam rectangulum OFK; æqualia erunt inter ſe duo iſta rectangula: proindeque erit, ut FO ad CK, ita BK ad FK. Hinc, ſicuti FO eſt ad AF in ratione compoſita ex FO ad CK, & ex CK ad AF; ita erit pariter FO ad AF in ratione compoſita ex BK ad FK, & ex CK ad AF; hoc eſt in ratione compoſita ex BC ad AC, & ex BC ad AB; ſive demum, componendo has rationes, ut BC quadratum ad rectangulum BAC.

CAPUT III.

Deſcriptio ellipſis, & aliæ ejus diametri.

111. Conicæ ſectiones, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortiuntur; infinitis aliis ſunt præditæ, ad quas quum referuntur per ſemiſſes earum rectarum, quæ a diametris illis biſecantur, iiſdem proprietatibus gaudent. Et quoniam cum aliis hiſce diametris ordinatæ, ſive rectæ biſectæ alios angulos conſtituunt; earum cognitio ad compoſitionem locorum geometricorum, quæ coni ſectionibus terminantur, maxime conducit. Unde ad rem erit, de aliis ſectionum conicarum diametris breviter hoc loco ſermonem inſtituere.

Or-

Ordiemur autem ab ellipſi, quam ne ſemper in ſolido conſiderare cogamur, oſtendemus primum, quo pacto ex cono in planum iſtiuſmodi curvam transferre licebit.

I. *Quomodo ellipſis in plano deſcribi poſſit, oſtenditur.*

112. DEntur in plano aliquo rectæ AB, AD, ſibi mutuo occurrentes in A; earumque prior AB referat diametrum ellipticæ ſectionis, in cono factæ; altera AD exhibeat, tum parametrum ejuſdem diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Oſtendendum eſt ergo, quo pacto in planum iſtud ſectio illa transferri poſſit. Ducatur per punctum D recta DE, ipſi AB parallela; & fiat, ut circa diametri extremitates A, & B revolvantur regulæ duæ AX, BZ hac lege, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per eas ex ipſis DE, AD, utrinque productis, ſint continuo æquales inter ſe. Dico, curvam, quæ deſcribitur continuis interſectionibus regularum AX, BZ, ellipſim, quam quærimus, eſſe. FIG. 8.

113. Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipſi AD parallela, quæ conveniat cum AB in N. Jamque erit * punctum M in quæſita ellipſi, ſi utique oſtendi poſſit, MN quadratum eſſe ad rectangulum ANB, ut eſt AD ad AB. Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex MN ad AN, & ex MN ad BN; ſive etiam ex AD ad DF, & ex AG ad AB. Sed, ob æquales DF, AG, duæ iſtæ *art. 90.

ra-

rationes componunt ſimplicem rationem, quam habet AD ad AB. Itaque erit, ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

114. Ut autem allata ellipſis deſcriptio melius intelligatur; notabimus primo, quod, ui regula AX fertur circulariter ex AD verſus AB; tunc regula altera BZ ferri debet circulari etiam motu ex BA verſus BI, quam ipſi AD ſuppono parallelam. Et quoniam revolutio harum regularum ea lege fieri * debet, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per ipſas ex rectis DE, AD, ſint perpetuo æquales inter ſe: perſpicuum eſt, quod, ubi regula AX pervenit ad AB, infinitamque adeo portionem abſcindit ex DE; tunc regula altera BZ perveniat oportet ſuper BI, quia hac ratione ipſa quoque ex AD infinitam portionem abſcindet.

*art. 112.

115. Notabimus ſecundo, quod, ubi eadem regula AX pergit moveri circulariter ex AB verſus AH, quam ipſi AD in directum eſſe ſuppono; tunc regula altera BZ proſequi debet motum ſuum circularem ex BI verſus BR, in quam AB, quum producitur, cadit. Et quoniam motus earundem regularum ea ſemper lege perfici * debet, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, maneant jugiter æquales inter ſe: liquet, quod, ubi regula AX pervenit ad AH, nullamque adeo portionem abſcindit ex DE; tunc regula altera BZ ſuper BR reperiatur neceſſe eſt, quia hac ratione ipſa etiam ex AD nullam quidem portionem abſcindet.

*art. 112.

116. Unde modo luce clarius apparet, ellipſim

pſim conſtare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum poſitis, quæ junguntur ſimul in utroque vertice ejuſdem diametri. Una ſiquidem deſcribitur, quum regula AX fertur circulariter ex AD verſus AB; eaque continetur in angulo BAD. Altera deſcribitur, quum eadem regula AX moveri pergit ex AB verſus AH; & pars iſta continetur in angulo BAH. Nec ſane, continuando motum ejuſdem regulæ AX, uſque donec circumferentiam integram abſolvat, aliæ ei partes accedunt.

117. Nam primo, quotieſcumque regula AX fertur ex AH verſus AK, quam ipſi AB in directum eſſe ſuppono; tunc regula altera BZ proſequetur motum ſuum ex BR verſus BL, in quam BI, quum producitur, cadit. Quare, ſicuti fiunt earundem regularum interſectiones in angulo BAD; ita deſcribetur eadem ellipſis portio, quæ in angulo illo continetur. Et ſecundo, ubi eadem regula AX fertur ex AK verſus AD; tunc altera BZ moveri perget ex BL verſus BA. Unde, ſicuti earundem regularum interſectiones fiunt in angulo BAH; ita deſcribetur ellipſis portio illa, quæ eo in angulo continetur.

118. Cæterum ex allata ellipſis deſcriptione perſpicuum eſt, ei id quidem contingere, ut, ductis per aliquod ejus punctum M rectis AX, BZ, occurrentibus ipſis DE, AD in punctis F, & G, æquales ſint inter ſe portiones duæ DF, AG. Sed, ſi eædem AX, BZ conveniant cum ipſis BI, IE in punctis O, & Q; æquales erunt etiam portiones BO, IQ. Quum enim inter ſe ſint æquales, tam duæ AD, BI, quam duæ DF, AG; erit, ut AD ad DF, ita BI ad AG. Sed

AD eſt ad DF, ut BO ad AB; itemque BI eſt ad AG, ut IQ ad AB. Itaque erit, ex æquali, ut BO ad AB, ita IQ ad eandem AB: & propterea duæ BO, IQ æquales erunt inter ſe.

119. Etſi autem ſint æquales tam duæ DF, AG, quam duæ BO, IQ; liquet tamen, minui quidem iſtas, quum eæ augentur; per contrarium augeri has, quum illæ minuuntur; ac demum fieri omnes æquales inter ſe, quum illud ellipſeos punctum deſcribitur, ex quo ordinata demiſſa diametrum biſecat. Hinc, ſicuti in deſcribenda ellipſi revolutio regularum AX, BZ temperari poteſt æqualitate, tam portionum DF, AG, quam portionum BO, IQ; ita conſultius erit, adhibere æqualitatem illarum, quum deſcribi debet portio ellipſis ſuperior; & viciſſim æqualitatem iſtarum, quum quæſtio eſt de deſcribenda portione ellipſis inferiore.

120. Jam, ſi punctum quæratur, in quo recta AX, ducta ex vertice A, ſecat ellipſim: per ea, quæ mox * oſtenſa ſunt: ſatis erit, ex vertice altero B ducere rectam BZ, quæ abſcindat; vel ex AD portionem AG, æqualem ipſi DE; vel ex IE portionem IQ, æqualem ipſi BO: quandoquidem interſectio rectarum AX, BZ quæſitum punctum exhibebit. Atque hinc liquet, quod, ſicuti, quum recta AX cadit ſuper AD, quæ ducta eſt per verticem A diametri ordinatis æquidiſtanter, contingit ea ellipſim in ſolo puncto A; ita, ubi eadem AX angulum conſtituit cum AD, non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto ſecare debet ellipſim.

* art. 118.

121. Similiter autem, ſi quæratur punctum, in quo recta BZ, ducta ex vertice B, ſecat el-

ellipſim: ſatis erit * ex vertice altero A ducere *art. 115.
rectam AX, quæ abſcindat; vel ex DE portionem, DF, æqualem ipſi AG; vel ex BI portionem BO, æqualem ipſi IQ; quandoquidem interſectio rectarum AX, BZ quæſitum punctum exhibebit. Unde etiam, ſicuti, quum recta BZ cadit ſuper BI, quæ ducta eſt per verticem B diametri ordinatis æquidiſtanter, ea contingit ellipſim in ſolo puncto B; ita, ubi eadem BX angulum conſtituit cum BI, non ſolum in B, ſed in alio quoque puncto ſecabit ellipſim.

II. *Quid ſit centrum ellipſis, & quodnam theorema fundamentale pro determinandis diametris aliis.*

122. QUemadmodum in circulo quælibet diameter tranſit per centrum; ſic etiam in ellipſi, cujus ſpecies quædam eſt circulus, diametri omnes tranſeunt per punctum illud, quod ellipſis centrum appellatur. Eſt autem hoc punctum id, quod bifariam dividit diametrum principalem, ſive quæ ex cono deducitur. Ut, ſi AB ſit diameter, quam ellipſis AMB FIG. 8.
ſortitur in ipſo cono, eademque ſecetur bifariam in C; vocabitur punctum iſtud C centrum ipſius ellipſis.

123. Sortitum eſt vero tale nomen iſtiuſmodi punctum, quia omnis recta, ut EF, per ipſum ducta, & utrinque ad ellipſim terminata, bifariam in eo dividitur. Nam, demiſſis ad diametrum ordinatis EG, FH; erit *, ut EG quadra- *art. 88
tum ad FH quadratum, ſive etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita rectangulum

AGB ad rectangulum AHB. Unde, addendo antecedentes conſequentibus, erit etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita CA quadratum ad CB quadratum; atque adeo, ut CG ad CH, ſive, ut CE ad CF, ita CA ad CB: & propterea, ſicuti æquales ſunt duæ CA, CB; ſic & duæ CE, CF pariter æquales erunt.

124. Ut autem pateat, eſſe diametrum ellipſis rectam quamvis, per centrum ductam, & utrinque ad eam terminatam, oſtendendum eſt prius ſequens theorema: quod, ſi EF ſit aliqua iſtarum rectarum, quæ biſecet in O ſubtenſam AM, ductam ex vertice A, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela agatur OL; erit ſemper, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Nec ſane difficile erit, theorema iſtud oſtendere. Nam, ſicuti AM dupla eſt ipſius AO; ita, ducta ad diametrum ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipſius AL. Unde, quum ſit etiam tota AB dupla totius AC; erit reliqua NB dupla pariter reliquæ LC: & propterea rectangulum ANB erit quadruplum rectanguli ALC.

125. Et quoniam MN dupla eſt etiam ipſius OL; erit MN quadratum quadruplum quadrati, quod ſit ex OL. Quare erit, ut OL quadratum ad MN quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum ANB. Sed, ob ellipſim *, MN quadratum eſt ad EG quadratum, ut rectangulum ANB ad rectangulum AGB. Itaque, ex æquo ordinando, erit, ut OL quadratum ad EG quadratum, ſive etiam, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB. Quumque, addendo terminos prioris

* art. 88.

ris rationis terminis ſecundæ, fiat etiam, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ACL ad CA quadratum, ſive, ita CL ad CA: plane neceſſe eſt, ut CL ſit ad CG, veluti eſt CG ad CA.

126. Inde vero plura inferre licebit, quæ ad id, quod eſt præcipuum, ſenſim nos manuducent. Nimirum primo, ductis rectis AK, EI, ipſis EG, AM parallelis, & convenientibus cum aliis EF, AB in K, & I; erit triangulum EGI æquale trapetio AGEK. Eſt enim, ex oſtenſis, * ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; ſive etiam, ut CA ad CI. Quare erit, ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI: & propterea fiet, ut CG ad CI, ita CG quadratum ad CA quadratum. Jam vero CG eſt ad CI, ut triangulum CEG ad triangulum CEI; itemque CG quadratum eſt ad CA quadratum, ut triangulum CEG ad triangulum CKA. Itaque erit, rurſus ex æquali, ut triangulum CEG ad triangulum CEI, ita idem triangulum CEG ad triangulum CKA: proindeque, quum æqualia fiant triangula duo CEI, CKA; dempto communi CEG, erit triangulum EGI æquale trapetio AGEK. *art. 124.

127. Secundo, iiſdem poſitis, erit triangulum AOK æquale trapetio EOAI. Eſt enim, ex oſtenſis *, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemq; CG eſt ad CA, ut CE ad CK. Quare erit, ex æquali, ut CO ad CE, ita CE ad CK: & propterea fiet, ut CO ad CK, ita CO quadratum ad CE quadratum. Jam vero CO eſt ad CK, ut triangulum CAO ad triangulum CAK; itemque CO quadratum eſt *art. 124.

ad CE quadratum, ut triangulum CAO ad triangulum CIE. Itaque erit, rurſus ex æquali, ut triangulum CAO ad triangulum CAK, ita idem triangulum CAO ad triangulum CIE: proindeque, quum æqualia fiant triangula duo CAK, CIE; dempto communi CAO, erit triangulum AOK æquale trapetio EOAI.

128. Tertio, ſi ex alio ellipſis puncto P ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipſis EI, EG parallelæ; erit triangulum PQS æquale correſpondenti trapetio AQRK. Nam, quum CA quadratum ſit ad unumquodque quadratorum CG, CQ, ut triangulum CAK ad unumquodque triangulorum CGE, CQR; erit, convertendo, ut CA quadratum ad unumquodque rectangulorum AGB, AQB, ita triangulum CAK ad unumquodque trapetiorum AGEK, AQRK. Quocirca, ordinando, erit, ut re-
art. 88. ctangulum AGB ad rectangulum AQB; hoc eſt, ut EG quadratum ad PQ quadratum; ſive etiam, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: & propte-
*art. 126. rea, ſicuti triangulum EGI oſtenſum eſt * æquale trapetio AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale trapetio AQRK.

129. Denique, ſi recta PS, ipſi EI parallela, conveniat cum EF in V; erit triangulum PVR æquale correſpondenti trapetio EVSI. Ponamus enim, punctum S eſſe ſupra verticem A, & punctum P jacere ad alteram partem puncti E, relate ad eundem verticem A. Et quo-
*art. 126. niam triangulum EGI eſt * æquale trapetio AGEK; addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale trapetio AQRK, ſi-

ve etiam * triangulo PQS. Quare, dempto communi trapetio VSQR, erit trapetio EVSI æquale triangulum PVR. *Art. 128.

130. Quamquam vero fieri poſſit, ut, tam punctum S cadat infra verticem diametri A, quam punctum P abeat ad partem oppoſitam relate ad E; methodo tamen non diſſimili veritatem ejus, de quo agitur, ſemper licebit oſtendere. Illud interim notandum, quod ſicuti trapetium EVSI non differt a triangulo CEI, quum punctum S congruit cum centro; ita, ſi idem punctum S cadat infra centrum, loco ejus trapetii ſumi debet differentia triangulorum CEI, CVS. Quod notari etiam debet in corollario præcedente * relate ad punctum Q. *Art. 128.

III. *Determinatio aliarum diametrorum, & earum affinitas cum diametro principali.*

131. EX iis, quæ mox oſtenſa ſunt, facile quidem erit, inferre, quod ſit diameter ellipſis recta quælibet, ducta per centrum, & utrinque ad eam terminata; quodque aliæ iſtæ diametri eaſdem habeant proprietates cum diametro principali. Jam enim, ut recta, ducta per centrum ellipſis, poſſit eſſe diameter ipſius; neceſſe eſt, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad ellipſim terminatas. Id vero facili quidem negotio oſtendemus. Ducatur enim per centrum C recta quævis EF, quæ biſecet in O ſubtenſam AM. Dico, eam ſecare quoque bifariam quamvis aliam rectam Pp, quæ ipſi AM parallela, utrinque ad ellipſim terminatur. FIG. 8.

132. Conveniat namque recta iſta Pp producta, ſi opus eſt, cum diametro principali AB in puncto S. Et, demiſſis ad eandem diametrum ordinatis PQ, pq, occurrentibus ipſi EF in punctis R, & r; agantur rectæ EI, AK, ipſis AM, PQ parallelæ, quæ cum aliis duabus AB, EF conveniant in I, & K. Eidem igitur trapetio EVSI æ-
*art. 129. quale erit * utrumque triangulorum PVR, PVr. Quare æqualia erunt inter ſe duo iſta triangula PVR, PVr. Sed eadem triangula, velut ſimilia, ſunt, ut quadrata laterum homologorum PV, pV. Itaque latera iſthæc homologa PV, pV pariter æqualia erunt; & conſequenter tota Pp bifariam ſecta erit in V.

133. Deinde habebunt omnes aliæ diametri eaſdem proprietates cum diametro principali; ſi utique, etiam relate ad eas, quadrata ordinatarum, hoc eſt ſemiſſium earum rectarum, quæ ab ipſis bifariam dividuntur, fuerint, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur. Id vero facillime etiam oſtendemus. Ma-
*art. 131. neant enim omnia, ut ſupra *. Dico, quadrata ipſarum AO, PV eſſe inter ſe, quemadmodum ſunt rectangula correſpondentia EOF, EVF.

134. Nam, quum CE quadratum ſit ad unumquodque quadratorum CO, CV, veluti eſt triangulum CEI ad unumquodque triangulorum COA, CVS; erit, convertendo, ut CE quadratum ad unumquodque rectangulorum EOF, EVF, ita triangulum CEI ad unumquod-
*art. 127. que trapetiorum EOAI, EVSI, ſive etiam * trian-
129. gulorum AOK, PVR. Quare, ordinando, erit, ut rectangulum EOF ad rectangulum EVF,

ita

ita triangulum AOK ad triangulum PVR. Sed triangulum AOK eſt ad triangulum PVR, ut AO quadratum ad PV quadratum. Et igitur, ex æquali, erit, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

135. Unde modo, ſi per verticem E ducatur recta EH, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO ſit ad rectangulum EOF, veluti eſt EH ad EF; erit* in hac eadem ratione quadratum cujuſvis alterius ordinatæ PV ad rectangulum EVF. Et, quemadmodum rectam iſtam EH appellare licebit parametrum diametri EF; ita, ſi jungatur FH, cum qua conveniat in X ordinata quævis PV; erit* PV quadratum æquale rectangulo EVX, & conſequenter minus rectangulo, quod fit ex parametro EH in abſciſſam correſpondentem EV, rectangulo alio, quod inſiſtens* eidem abſciſſæ, eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex parametro EH in ipſam diametrum EF. FIG. 9. *art. 90. *art. 91. *art. 92.

136. Hinc ulterius deſcribere licebit ellipſim, datis longitudine, & poſitione, non modo diametro principali AB, & parametro ejus AD, verum etiam alia quavis diametro EF, & parametro ejus EH. Unde etiam*, ſicuti recta EH, ducta per verticem E ipſius diametri EF, ordinatis ſuis æquidiſtanter, contingere debet ellipſim in ſolo puncto E; ita omnis alia recta, quæ ducta ex eodem vertice E angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in alio puncto ſecabit ellipſim. Ex quo fiet, ut, ſicuti ex diametro principali tranſire licuit ad alias diametros; ſic ex qualibet alia diametro, *art. 120. 121.

tum

tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes poſſit perveniri.

137. Nam ſemper ac eædem ſunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamentale, quod paulo ante * oſtenſum eſt, relate ad diametrum principalem, poterit eadem omnino ratione demonſtrari de quavis alia diametro EF. Unde omnes illæ æqualitates triangulorum, trapetiorumque, ſuperius oſtenſæ in ordine ad diametrum principalem, obtinebunt quoque reſpectu cujuſvis alterius diametri EF: proindeque, iis adhibitis, oſtendere rurſus licebit, eſſe diametros ellipſis omnes rectas, ductas per centrum, & utrinque ad eas terminatas; nec non alias iſtas diametros eaſdem habere proprietates cum ipſa diametro EF.

*Art. 124.

138. Cæterum, præter eas, quæ tranſeunt per centrum, nulla alia recta eſſe poteſt diameter ellipſis. Nam, ut recta aliqua eſſe poſſit diameter ellipſis, neceſſe eſt, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad ellipſim terminatas. Sit ergo TY recta, poſitione data, cui debent eſſe parallelæ eæ omnes, quæ bifariam a diametro dividuntur. Jamque, ſi ea parallela ſit ordinatis diametri principalis AB, erit ipſa AB diameter quæſita. Quod ſi ſecus accidat, ſit ei æquidiſtans AM, quæ occurret ellipſi * in alio puncto M. Et rurſus quæſita diameter erit * recta EF, quæ, ducta per centrum C, biſecat in O ſubtenſam AM.

*Art. 120.

*Art. 131.

IV.

IV. *Diametrorum ellipſis aliæ communes affectiones indicantur.*

139. PRæter recenſitas proprietates, plures alias communes habent ellipſeos diametri. Ac primo quidem quælibet earum, non alias rectas, utrinq; ad curvam terminatas, biſariam dividit, quam, quæ vel tranſeunt per centrum, vel ordinatim ad ipſam diametrum applicantur. Si enim fieri poteſt, diameter ellipſis AB biſecet in S rectam Pp, quæ utrinque ad curvam terminata, nec tranſeat per centrum C, nec ipſi AB ſit ordinatim applicata. Quia ergo, ducta ſubtenſa AM, ipſi Pp parallela, & biſecta ea in O, debet * recta CO ſecare Pp biſariam in V; biſecta erit eadem Pp, tam in S, quam in V: quod fieri non poteſt. FIG. 9. *art. 131.

140. Hinc autem ſequitur viciſſim, quod ſi aliqua ellipſis diameter biſecet rectam aliquam, non tranſeuntem per centrum, & utrinque terminatam ad ellipſim; hæc eſſe debet diametri illius ordinata. Unde ulterius eruitur, quod ſi recta aliqua biſecet alias duas æquidiſtantes, & utrinque ad ellipſim terminatas; ea ſit oportet diameter ipſius ellipſis, atque adeo tranſibit per centrum. Nam aliter, ducta per punctum biſectionis unius ex rectis æquidiſtantibus, & centrum recta alia; hæc, velut diameter, biſecabit quoque rectam aliam æquidiſtantem: quod fieri non poteſt.

141. Id vero quum ita ſit, facile erit, cujuſvis datæ ellipſis, ſive centrum, ſive diametrum aliquam reperire. Neque enim aliud fieri debet, quam

quam ducere intra datam ellipſim rectas duas æquidiſtantes, & utrinque ad curvam terminatas. Nam, ſicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit ellipſis; ſic & punctum, quod biſecat diametrum iſtam, ejuſdem centrum exhibebit. Speciatim autem in omni ellipſi reperire licebit binas diametros, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituant.

142. Comperta enim quacumque ellipſis
FIG. 10. diametro EF, quæ oblique inſiſtat ſuis ordinatis; deſcribatur ſuper ea ſemicirculus EPF, qui neceſſario ſecabit ellipſim in puncto aliquo P. Jungantur deinde rectæ PE, PF; & diametri AB, KL, quarum eæ ſunt ordinatæ, rectos cum iiſdem angulos conſtituent. Nam, ob rectas PE, EF biſectas in G, & C, GE eſt ad GP, ut CE ad CF. Quare, quum ſiat AB ipſi PF parallela, erit angulus CGE æqualis angulo FPE: & propterea, ſicuti rectus eſt angulus FPE, ſic etiam angulus CGE rectus erit. Neque aliter oſtendemus, rectum eſſe angulum CIF, quem diameter altera KL conſtituit cum ipſa PF.

143. In qualibet igitur ellipſi ſemper reperire licebit binas diametros, quæ rectos cum ſuis ordinatis angulos conſtituant. Binæ iſtæ diametri vocantur axes ipſius ellipſis: qui ſicuti nequeunt eſſe æquales inter ſe, niſi ellipſis ipſa abeat in circulum; ita tales deprehenduntur, ut, deſcriptis ſuper iis circulis duobus, cadat totus intra ellipſim, qui deſcribitur ſuper axe minore; & viciſſim totus extra eam, qui deſcribitur ſuper axe majore. Unde prono alveo fluit, præter binas illas, nullas alias dari diametros, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituant.

144. Quod ſi diameter quæratur, quæ cum ſuis ordinatis conſtituat ad partem unam datum quemvis angulum obtuſum: ſatis erit, ſuper aliquo ipſorum axium, velut AB, deſcribere ſegmentum circuli, quod angulum illum ſuſcipiat. Nam, junctis punctis A, & B cum aliis illis, in quibus deſcriptum circuli ſegmentum ſecat ellipſim, per rectas totidem; fient rectæ iſtæ ordinatæ diametrorum, quæ quæſito ſatisfacient. Patetque, demonſtrationem hujus rei eandem eſſe cum illa, quam paulo ante * in determinatione axium adhibuimus. *art. 142.

145. Notandum interim hoc loco eſt, quod deſcriptum circuli ſegmentum ellipſim ſecat in duobus punctis, quum angulus datus major eſt angulo AKB; eam contingit in unico puncto K, quum ei eſt æqualis; ac denique nullibi eidem occurrit, quum eodem eſt minor. Unde etiam quæſita diameter erit quadruplex in primo caſu, nonniſi duplex in ſecundo, ac nulla demum in tertio. Nec reticebimus, quod, ſicuti in ſecundo caſu AK, BK ſunt ordinatæ duarum diametrorum, quæ quæſito ſatisfaciunt; ita binæ illæ diametri æquales erunt inter ſe.

146. Si quæſtio ſit de determinanda poſitione ordinatarum alicujus datæ diametri, in ſubſidium poterit advocari ſequens theorema: quod, ſi ex verticibus A, & E duarum quarumvis diametrorum AB, EF ordinatæ ad ipſas demittantur AO, EG, eſſe debet, ut CG ad AG, ita CO ad EO. Nam, ducta OL, ipſi EG parallela; fiet*, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE. Quare erit, ex æquali, ut CG ad CA, ita CO ad CE; & conſequenter, FIG. 8. *art. 124. 137.

ſub-

ſubducendo antecedentes ex conſequentibus; erit etiam, ut CG ad AG, ita CO ad EO.

147. Qua autem ratione, ope hujus theorematis, determinari poſſit poſitio ordinatarum cujuſvis diametri datæ; haud difficile erit intelligere. Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur ex vertice ejus A recta quævis AM, quæ ellipſim ſecet in M. Tum, ſecta ea bifariam in O, jungatur CO, quæ extendatur in E. Secetur poſtea CA ſubinde in G, ut CG ſit ad AG, veluti eſt CO ad EO. Et, juncta recta EG, erit recta iſta EG ordinata una ipſius AB.

148. Cæterum circa diametros ellipſis nolo hic reticere, quod ſi aliqua extiterit diameter KL parallela ordinatis alterius AB; iſta viciſſim ordinatis illius æquidiſtans eſſe debeat. Ducatur enim recta MP, ipſi AB parallela, quæ utrinque ad ellipſim terminata, conveniat cum KL in V. Jamque, actis ad eandem AB ordinatis MN, PQ, fient iſtæ æquales inter ſe. Unde, quum æqualia fiant etiam rectangula ANB, AQB; detractis iis ex æqualibus quadratis CA, CB, erunt pariter æqualia reliqua quadrata CN, CQ. Duæ igitur CN, CQ æquales fient inter ſe. Quare, ob parallelogramma CM, CP, erunt pariter æquales duæ MV, PV: & propterea tota MP biſecta erit in V.

FIG. 19.

149. Binæ iſtæ diametri, quarum altera alterius ordinatis æquidiſtat, ſæpius deinceps ſub contemplationem venient, earundemque alteram alterius conjugatam appellabimus. Non eſt autem reticendum, quod cujuſque conjugata diameter eſt media proportionalis inter ipſam, & pa-

& parametrum ejus. Ita, ſi KL ſit conjugata ipſius AB, cujus etiam AD ſit parameter; erit, ut AD ad KL, ita KL ad AB. Nam KC quadratum, eſt ad rectangulum ACB, ſive AC quadratum, non modo, ut AD ad AB, verum etiam, ut KL quadratum ad AB quadratum. Quare erit, ex æquali, ut AD ad AB, ita KL quadratum ad AB quadratum: & propterea tres rectæ AD, KL, AB continue proportionales erunt.

V. *Tangentium, & ſecantium ellipſis accidentia principaliora.*

150. Etſi theoria tangentium, & ſecantium aliena a ſcopo noſtro videatur; non gravabimur tamen, aliqua de iis etiam ſubnectere. Ac primo quidem jam vidimus ſupra*, rectam, quæ ex vertice alicujus diametri ducitur æquidiſtanter ſuis ordinatis, contingere ellipſim in ſolo illo vertice; nec aliam rectam cadere in locum ellipſi, & tangente contentum. Inde autem duo conſequuntur. Primum eſt, quod ad unum, idemque punctum ellipſis unica tantum tangens duci poteſt. Alterum, quod recta, contingens ellipſim in puncto aliquo, debet eſſe parallela ordinatis ejus diametri, quæ pertinet ad punctum contactus. *art. 120. 121. 136.

151. Contingat nunc ellipſim recta EI in puncto E, vertice diametri EF. Jamque, ſi ea conveniat cum altera quavis diametro AB in puncto I, ad quam etiam ex puncto contactus E ordinata demittatur EG; erit, ut CG ad CA, ita CA ad CI. Ducatur enim ad diametrum EF ordinata AO; & per punctum O agatur OL, ip- FIG. 8.

* art. 124. ipſi EG parallela. Per ea ergo, quæ ſuperius
137. oſtenſa ſunt, erit, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque, ob parallelas AO, EI, eſt etiam, ut CO ad CE, ita CA ad CI. Itaque erit, ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI.

152. Ex hoc theoremate, facile quidem erit, omnes alias proprietates derivare, quæ ellipſis tangentibus competunt. Sed ejus converſum nullo etiam negotio licebit oſtendere: nimirum, quod, ſi CG ſit ad CA; veluti eſt CA ad CI, recta EI contingere debet ellipſim in ſolo puncto
* art. 124. E. Nam, iiſdem poſitis, erit rurſus, * ut CL
137. ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque, ex hypotheſi, CG eſt ad CA, ut CA ad CI. Itaque erit, ex æquali, ut CO ad CE, ita CA ad CI: proindeque, quum duæ AO, EI parallelæ ſiant inter ſe; plane neceſ-
* art. 150. ſe eſt *, ut EI contingat ellipſim in E.

153. Quantnm ad ſecantes ellipſis; hoc in iis obtinet theorema, quod ſi duæ quævis ſecan-
FIG. 11. tes MO, PQ ſibi mutuo occurrant in R; re-
12. ctangula ſub ſegmentis ipſarum MRO, PRQ ſint, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, quarum ipſæ MO, PQ ſunt ordinatæ. Ut autem hoc theorema nullam habet difficultatem, quum utraque ſecantium eſt diameter; ita ponamus primo, unam earum PQ eſſe diametrum,
FIG. 11. alteram vero MO eſſe ordinatam diametri AB, cujus KL ſit conjugata. Oſtendendum eſt ergo, rectangulum MRO eſſe ad rectangulum PQR, ut eſt KL quadratum ad PQ quadratum.

154. Ut id oſtendamus, demittantur ſuper KL rectæ MS, PT, RV, ipſi AB parallelæ. Et

quo-

quoniam CT quadratum eſt ad CV quadratum, ut PT quadratum ad RV, ſive MS quadratum; aut etiam *, ut rectangulum KTL ad rectangulum KSL: capiendo ſummas antecedentium, & conſequentium, erit, ut CK quadratum ad CV quadratum una cum rectangulo KSL, ita CT quadratum ad CV quadratum, ſive etiam, ita CP quadratum ad CR quadratum. Unde, capiendo differentias inter antecedentem, & conſequentem cujuſque rationis, erit quoque, ut CK quadratum ad differentiam quadratorum CS, CV, ita CP quadratum ad differentiam quadratorum CP, CR. *Art. 88.

155. Quum autem differentia quadratorum CS, CV ſit æqualis rectangulo MRO, & differentia quadratorum CP, CR adæquet rectangulum PRQ; erit pariter, ut CK quadratum ad rectangulum MRO, ita CP quadratum ad rectangulum PRQ; & permutando, ut CK quadratum ad CP quadratum, ita rectangulum MRO ad rectangulum PRQ. Sed CK quadratum eſt ad CP quadratum, ut KL quadratum ad PQ quadratum. Itaque erit, ex æquali, ut KL quadratum ad PQ quadratum, ita rectangulum MRO ad rectangulum PRQ.

156. Ponamus ſecundo, neutram rectarum MO, PQ diametrum eſſe; ſed primam quidem MO referri ut ordinatam ad diametrum AB, cujus KL ſit conjugata; alteram vero PQ ordinatam eſſe diametri EF, quæ habeat GI pro ſua conjugata. Oſtendendum eſt ergo, rectangulum MRO eſſe ad rectangulum PRQ, ut eſt KL quadratum ad GI quadratum. Id vero liquet abunde. Nam, ducta per punctum R diametro FIG. 12.

* art. 151. TV; erit, ex oſtenſis *, ut rectangulum MRO ad rectangulum TRV, ita KL quadratum ad TV quadratum; &, ut rectangulum TRV ad rectangulum PRQ, ita TV quadratum ad GI quadratum. Quare erit, ordinando, ut rectangulum MRO ad rectangulum PRQ, ita KL quadratum ad GI quadratum.

157. Fieri autem poteſt, ut una ex ſecantibus tangens evadat: nimirum, quum puncta duo ſectionis coeunt in unum. Id vero quum contingit, rectangulum ſub ejus ſegmentis vertetur in quadratum ipſius tangentis. Unde inter quadratum iſtud, & rectangulum, contentum ſub ſegmentis alterius, eadem adhuc ratio obtinebit. Sed nihil obſtat, quin utraque ſecans vertatur in tangentem: quo caſu ambo quidem rectangula abibunt in quadrata ipſarum tangentium; & inter quadrata iſta eadem ſemper ratio locum habebit.

158. Si ergo ex puncto, ſumpto extra ellipſim; ducantur ad eam tangentes duæ; erunt quadrata iſtarum tangentium inter ſe, ut ſunt quadrata ex conjugatis diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus. Et, ſi ex eodem puncto ducantur rectæ duæ, quarum una tangat ellipſim, altera eandem ſecet; erit quadratum tangentis ad rectangulum ſub ſecante tota, & portione, extra ellipſim exiſtente, ut eſt quadratum ex conjugata diametri, quæ pertinet ad punctum contactus, ad quadratum ex conjugata diametri illius, ad quam ea ſecans velut ordinata refertur.

159. Cæterum ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, prono alveo fluunt ſequentia duo theorema-

mata. Primum eſt, quod, ſi duabus ellipſis tangentibus parallelæ fuerint duæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tum tangentes, cum ſecantes; rectangula ſub ſecantium ſegmentis proportionalia eſſe debent quadratis, quæ ex tangentibus fiunt. Alterum eſt, quod, ſi duabus ſecantibus ellipſis parallelæ fuerint binæ aliæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tam illæ, quam iſtæ; rectangula ſub ſegmentis illarum proportionalia ſint oportet rectangulis, quæ ſub iſtarum ſegmentis continentur.

CAPUT IV.

Deſcriptio hyperbolæ, & aliæ ipſius diametri.

160. Ellipſis diametris aliis definitis, proximum jam eſt, ut determinationem aggrediamur aliarum diametrorum, quarum eſt capax hyperbola. Quum autem duæ iſtæ coni ſectiones ſint valde affines inter ſe; licebit, in hyperbola diametros alias definire eadem plane ratione, qua eas determinavimus in ellipſi. Sed, ne hanc etiam curvam ſemper in ſolido conſiderare cogamur; quo pacto ea ex cono in planum transferri poſſit, primum oſtendemus. Qua in re nec item ab ellipſi recedet hyperbola; quum eadem ſit utriuſque curvæ in plano deſcriptio.

I. *Quomodo hyperbola in plano deſcribi poſſit, aperitur.*

FIG. 13. 161. **D**Entur in plano aliquo rectæ duæ AB, AD, ſibi mutuo occurrentes in A; earumque prior AB referat diametrum hyperbolicæ ſectionis, in cono factæ; altera AD exhibeat, tum parametrum ejuſdem diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Oſtendendum eſt ergo, quo pacto in planum iſtud ſectio illa transferri poſſit. Ducatur per punctum D recta DE, ipſi BA parallela; & fiat, ut circa diametri extremitates A, & B revolvantur regulæ duæ AX, BZ hac lege, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per eas ex ipſis DE, AD, utrinque productis, ſint continuo æquales inter ſe. Dico, curvam, quæ deſcribitur continuis interſectionibus regularum AX, BZ, hyperbolam, quam quærimus, eſſe.

162. Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipſi AD parallela, quæ conveniat cum AB in N. Jamque erit punctum M in quæſita hyperbola, ſi utique oſtendi * poſſit, MN quadratum eſſe ad rectangulum ANB, ut eſt AD ad AB. Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum ANB in ratione compoſita ex MN ad AN, & ex MN ad NB; ſive etiam in ratione compoſita ex AD ad DF, & ex AG ad AB. Sed, ob æquales DF, AG, duæ iſtæ rationes componunt ſimplicem rationem, quam habet AD ad AB. Itaque erit, ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

* art. 99

163.

163. Ut autem allata hyperbolæ deſcriptio melius intelligatur, notabimus primo, quod, ubi regula AX fertur circulari motu ex AD verſus AK, quam ipſi AB in directum eſſe ſuppono; tunc regula altera BZ ferri debet etiam circulariter ex BA verſus BI, quam parametro AD ſuppono parallelam. Et quoniam revolutio harum regularum ea lege fieri * debet, ut portiones DF, AG, abſciſſæ per ipſas ex rectis DE, AD, ſint perpetuo æquales inter ſe: perſpicuum eſt, quod, ubi regula AX pervenit ad AK, infinitamque adeo portionem abſcindit ex DE; tunc regula altera BZ perveniat oportet ſuper BI, quia hac ratione ipſa quoque ex AD infinitam portionem abſcindet. *art.161.

164. Notabimus ſecundo, quod, ubi eadem regula AX pergit moveri circulariter ex AK verſus AH, quam ipſi AD in directum eſſe ſuppono; tunc regula altera BZ proſequi debet motum ſuum circularem ex BI verſus BR, in quam AB, quum producitur, cadit. Et quoniam motus earundem regularum ea ſemper lege debet * abſolvi, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, maneant jugiter æquales inter ſe: liquet, quod, ubi regula AX pervenit ad AH, nullamque adeo portionem abſcindit ex DE; tunc regula altera BZ ſuper BR reperiatur neceſſe eſt, quia hac ratione ipſa etiam ex AD nullam portionem abſcindet. *art.161.

165. Unde modo luce clarius apparet, hyperbolam conſtare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum poſitis, quæ ſimul junguntur in vertice A, eique aliam opponi, duabus itidem ex partibus conſtantem, quarum unio

E 3 con-

contingit in vertice altero B. Ubi enim regula AX fertur circulariter ex AD verſus AK, deſcribitur; primo hyperbolæ principalis pars illa, quæ exiſtit in angulo DAK; tum ea hyperbolæ oppoſitæ pars, quæ jacet in angulo LBR. Ubi vero eadem AX pergit moveri ex AK verſus AH; primo quidem deſcribitur pars illa hyperbolæ oppoſitæ, quæ continetur in angulo IBR; tum hyperbolæ principalis ea pars, quæ in angulo HAK reperitur.

166. Continuando autem motum utriuſque regulæ, uſque donec integras revolutiones abſolvant, haud quidem utrique hyperbolarum novæ partes accedent. Nam primo, ubi regula AX fertur ex AH verſus AB, tunc altera BZ proſequetur motum ſuum ex BR verſus BL, in quam BI, quum producitur, cadit. Quare, ſicuti fiunt earum regularum interſectiones, primo quidem in angulo DAK, tum in angulo LBR; ita deſcribentur eædem utriuſq; hyperbolæ portiones, quæ in angulis illis continentur. Et ſecundo, ubi eadem regula AX fertur ex AB verſus AD, tunc altera BZ perget moveri ex BL verſus BA. Unde, ſicuti earundem regularum interſectiones fiunt, primo quidem in angulo IBR, deinde vero in angulo HAK; ita deſcribentur utriuſque hyperbolæ portiones illæ, quæ in iiſdem angulis exiſtunt.

167. Cæterum ex allata hyperbolæ deſcriptione perſpicuum eſt, ei id quidem contingere, ut, ductis per aliquod ejus punctum M rectis AX, BZ, occurrentibus ipſis DE, AD in punctis F, & G, æquales ſint inter ſe portiones duæ DF, AG. Sed, ſi eædem AX, BZ conveniant

cum

cum ipſis BL, IE in punctis O, & Q; æquales erunt etiam portiones BO, IQ. Quum enim inter ſe ſint æquales, tam duæ AD, BI, quam duæ DF, AG; erit, ut AD ad DF, ita BI ad AG. Sed AD eſt ad DF, ut BO ad AB; itemque BI eſt ad AG, ut IQ ad AB. Itaque erit ex æquali, ut BO ad AB, ita IQ ad eandem AB: & propterea duæ BO, IQ æquales erunt inter ſe.

168. Etſi autem ſint æquales, tam duæ DF, AG, quam duæ BO, IQ; liquet tamen, minui quidem iſtas, quum eæ augentur; per contrarium augeri has, quum illæ minuuntur: ac demum fieri omnes æquales inter ſe, quum, abeunte puncto M in infinitum, parallelæ fiunt inter ſe rectæ duæ AX, BZ. Hinc, ſicuti in deſcribenda hyperbola revolutio regularum AX, BZ temperari poteſt æqualitate, tam portionum DF, AG, quam portionum BO, IQ; ita conſultius erit, adhibere æqualitatem illarum, quum deſcribi debet hyperbola principalis, quæ tranſit per verticem A; & viciſſim æqualitatem iſtarum, quum quæſtio eſt de deſcribenda hyperbola oppoſita, quæ tranſit per verticem B.

169. Jam, ſi punctum quæratur, in quo recta AX, ducta ex vertice A, ſecat aliquam hyperbolarum: per ea, quæ mox * oſtenſa ſunt, ſatis erit, ex vertice altero B ducere rectam BZ, quæ abſcindat; vel ex AD portionem AG, æqualem ipſi DE; vel ex IE portionem IQ, æqualem ipſi BO; quandoquidem interſectio rectarum AX, BZ quæſitum punctum exhibebit. Atque hinc liquet, quod, ſicuti, quum recta AX cadit ſuper AD, quæ ducta eſt per verticem A, diametri ordinatis æquidiſtanter, contingit ea hy-

* art. 167.

perbolam principalem in ſolo puncto A ; ita, ubi eadem AX angulum conſtituit cum AD, non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto hyperbolarum aliquam ſecare debet.

170. Similiter autem, ſi quæratur punctum, in quo recta BZ, ducta ex vertice B, ſecat aliquam hyperbolarum : ſatis erit *, ex vertice altero A ducere rectam AX, quæ abſcindat ; vel ex DE portionem DF, æqualem ipſi AG; vel ex BL portionem BO, æqualem ipſi IQ ; quandoquidem interſectio rectarum AX, BZ quæſitum punctum exhibebit. Unde etiam, ſicuti, quum recta BZ cadit ſuper BI, quæ ducta eſt per verticem B diametri ordinatis æquidiſtanter, ea contingit hyperbolam oppoſitam in ſolo puncto B ; ita, ubi eadem BZ angulum conſtituit cum BI, non ſolum in B, ſed in alio quoque puncto hyperbolarum alicui occurrat oportet.

*art.167.

II. *Quid ſit centrum hyperbolæ, & quodnam theorema fundamentale pro determinandis diametris aliis.*

171. Quemadmodum in ellipſi, ita etiam in hyperbola omnes aliæ diametri tranſeunt per punctum illud, quod hyperbolæ centrum appellatur. Eſt autem hoc punctum, id, quod bifariam dividit diametrum principalem, ſive quæ ex cono deducitur. Ut, ſi
FIG. 14. AB ſit diameter, quam hyperbola ſortitur in ipſo cono, eademque ſecetur bifariam in puncto C ; vocabitur punctum iſtud C centrum ipſius hyperbolæ.

172. Sortitum eſt vero tale nomen iſtiuſ-

modi punctum, quia omnis recta, ut EF, per ipſum ducta, & utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminata, biſariam in eo dividitur. Nam, demiſſis ad diametrum ordinatis EG, FH; erit *, ut EG quadratum ad FH quadratum, ſive etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Unde, ſubtrahendo conſequentes ex antecedentibus; erit etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita CA quadratum ad CB quadratum; atque adeo, ut CG ad CH, ſive, ut CE ad CF, ita CA ad CB: & propterea, ſicuti æquales ſunt duæ CA, CB; ſic & duæ CE, CF pariter æquales erunt. * art. 96.

173. Verum quidem eſt, illud hic a nobis aſſumptum eſſe, ut recta CE, quæ per centrum ducta, uni hyperbolarum oppoſitarum occurrit, debeat quoque cum altera convenire. Sed facile erit, iſtud oſtendere. Nam, ſi, demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, capiatur EH æqualis EG; fiet rectangulum AGB æquale rectangulo AHB. Unde, erecta ad partem contrariam ordinata alia HF; erunt quadrata ordinatarum EG, FH pariter æqualia: & propterea, juncta CF, non modo æquales fient duæ CE, CF; verum etiam, ob æquales angulos ECG, FCH, eædem jacebunt in directum.

174. Ut autem pateat, eſſe diametrum hyperbolæ rectam quamvis, per centrum ductam, & utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminatam, oſtendendum eſt prius ſequens theorema: quod, ſi EF ſit aliqua iſtarum rectarum, quæ biſecet in O ſubtenſam AM, ductam ex vertice A, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela agatur OL; erit ſemper,

per, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Nec ſane difficile erit, theorema iſtud oſtendere. Nam, ſicuti AM dupla eſt ipſius AO; ita, ducta ad diametrum ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipſius AL. Unde, quum ſit etiam AB dupla ipſius AC, erit tota BN dupla pariter totius CL: & propterea rectangulum ANB erit quadruplum rectanguli ALC.

175. Et quoniam MN dupla eſt etiam ipſius OL; erit MN quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex OL. Quare erit, ut OL quadratum ad MN quadratum, ita rectangulum ALC ad
* art. 96. rectangulum ANB. Sed, ob hyperbolam *, MN quadratum eſt ad EG quadratum, ut rectangulum ANB ad rectangulum AGB. Itaque, ex æquo ordinando, erit, ut OL quadratum ad EG quadratum, ſive etiam, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB. Quumque, ſubtrahendo terminos ſecundæ rationis ex terminis primæ, fiat, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ACL ad AC quadratum, hoc eſt, ita CL ad CA: plane neceſſe eſt, ut CL ſit ad CG, veluti eſt CG ad CA.

176. Inde vero plura inferre licebit, quæ ad id, quod eſt præcipuum, ſenſim nos manuducent. Nimirum primo, ductis rectis AK, EI, ipſis EG, AM parallelis, & convenientibus cum aliis EF, AB in K, & I; erit triangulum EGI æquale
* art. 174. trapetio AGEK. Eſt enim, ex oſtenſis *, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE, ſive etiam, ut CA ad CI. Quare erit, ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI; & propterea fiet, ut CG ad CI, ita CG quadra-

tùm ad CA quadratum. Jam vero CG eſt ad CI, ut triangulum CEG ad triangulum CEI; itemque CG quadratum eſt ad CA quadratum, ut triangulum CEG ad triangulum CAK. Itaque erit, rurſus ex æquali, ut triangulum CEG ad triangulum CEI; ita idem triangulum CEG ad triangulum CAK: proindeque, quum æqualia fiant triangula duo CEI, CAK; dempto utroque ex communi triangulo CEG, erit triangulum EGI æquale trapetio AGEK.

177. Secundo, iiſdem poſitis, erit triangulum AOK æquale trapetio EOAI. Eſt enim, ex oſtenſis *, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque CG eſt ad CA, ut CE ad CK. Quare erit, ex æquali, ut CO ad CE, ita CE ad CK: & propterea fiet, ut CO ad CK, ita CO quadratum ad CK quadratum. Jam vero CO eſt ad CK, ut triangulum CAO ad triangulum CAK; itemque CO quadratum eſt ad CK quadratum, ut triangulum CAO ad triangulum CIE. Itaque erit, rurſus ex æquali, ut triangulum CAO ad triangulum CAK, ita idem triangulum CAO ad triangulum CIE: proindeque, quum æqualia fiant triangula duo CAK, CIE; dempto utroque ex communi triangulo CAO, erit triangulum AOK æquale trapetio EOAI

* art. 174.

178. Tertio, ſi ex alio hyperbolæ puncto P ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipſis EI, EG parallelæ; erit triangulum PQS æquale correſpondenti trapetio AQRK. Nam, quum CA quadratum ſit ad unumquodque quadratorum CG, CQ, ut eſt triangulum CAK ad unumquodq; triangulorum CGE,

CQR; ſubtrahendo antecedentes ex conſequentibus, erit, ut CA quadratum ad unumquodque rectangulorum AGB, AQB, ita triangulum CAK ad unumquodque trapetiorum AGEK, AQRK. Quare, ordinando erit, ut rectangulum AGB ad rectangulum AQB; hoc eſt *, ut EG quadratum ad PQ quadratum; ſive etiam, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: & propterea, ſicuti triangulum EGI oſtenſum eſt * æquale trapetio AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale trapetio AQRK.

* art. 96.

* art. 176.

179. Denique, ſi recta PS, ipſi EI parallela, conveniat cum EF in V; erit triangulum PVR æquale correſpondenti trapetio EVSI. Ponamus enim, punctum S eſſe ſupra verticem A, & punctum P jacere ad alteram partem puncti E, relate ad eundem verticem A. Et quoniam triangulum EGI * eſt æquale trapetio AGEK; addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale trapetio AQRK, ſive etiam * triangulo PQS. Quare, dempto communi trapetio VSQR, erit trapetio EVSI æquale triangulum PVR.

* art. 176.

* art. 178.

180. Quamquam vero fieri poſſit, ut, tam punctum S cadat infra verticem A, quam punctum P abeat ad partem oppoſitam; methodo tamen non diſſimili veritatem ejus, de quo agitur, ſemper licebit oſtendere. Illud interim notandum, quod ſi punctum P capiatur in hyperbola oppoſita: adeo nempe, ut punctum S cadat ſupra centrum; tunc loco trapetii EVSI ſumenda eſt differentia triangulorum CEI, CVS: quemadmodum in corollario præcedente * loco trapetii AQRK ſumere oportebit differentiam triangulorum CAK, CQR.

* art. 178.

III.

III. *Determinatio aliarum diametrorum, & earum affinitas cum diametro principali.*

181. EX iis, quæ mox oſtenſa ſunt, facile quidem erit, inferre, quod ſit diameter hyperbolæ recta quælibet, ducta per centrum, & utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminata; quodque aliæ iſtæ diametri eaſdem habeant proprietates cum diametro principali. Jam enim, ut recta, ducta per centrum hyperbolæ, poſſit eſſe diameter ipſius, neceſſe eſt, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad curvam terminatas. Id vero facili quidem negotio oſtendemus. Ducatur enim per centrum C recta quævis EF, quæ biſecet in O ſubtenſam AM. Dico, eam ſecare quoque bifariam quamvis aliam rectam Pp, quæ, ipſi AM parallela, utrinque ad curvam terminatur. FIG. 14.

182. Conveniat namque recta iſta Pp producta, ſi opus eſt, cum diametro principali AB in puncto S; & demiſſis ad eandem diametrum ordinatis PQ, pq, occurrentibus ipſi EF in punctis R, & r, ducantur rectæ EI, AK, ipſis AM, PQ parallelæ, quæ cum aliis duabus AB, EF conveniant in I, & K. Eidem igitur trapezio EVSI æquale * erit utrumque triangulorum PUR, pVr. Quare æqualia erunt inter ſe duo iſta triangula PVR, pVr. Sed eadem triangula, velut ſimilia, ſunt, ut quadrata laterum homologorum PV, pV. Itaque latera iſthæc homologa PV, pV pariter æqualia erunt; & conſequenter tota Pp bifariam ſecta erit in V. * *Art.* 179.

183. Deinde habebunt omnes aliæ diame-

tri

tri eaſdem proprietates cum diametro principali; ſi utique, etiam relate ad eas, quadrata ordinatarum, hoc eſt ſemiſſium earum rectarum, quæ bifariam ab ipſis dividuntur, fuerint, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis continentur. Id vero facillime etiam oſtendemus.
*art. 181. Maneant enim omnia, ut ſupra *. Dico, quadrata ipſarum AO, PV eſſe inter ſe, veluti ſunt rectangula correſpondentia EOF, EVF.

184. Nam, quum CE quadratum ſit ad unumquodq; quadratorum CO, CV, ut eſt triangulum CEI ad unumquodque triangulorum COA, CVS; ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit, ut CE quadratum ad unumquodque rectangulorum EOF, EVF, ita triangulum CEI ad unumquodq; trapetiorum EOAI,
*ar. 177. EVSI, ſive etiam * triangulorum AOK, PVR.
179. Quare, ordinando, erit, ut rectangulum EOF ad rectangulum EVF, ita triangulum AOK ad triangulum PVR. Sed triangulum AOK eſt ad triangulum PVR, ut AO quadratum ad PV quadratum. Et igitur, ex æquali, erit, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

FIG. 15. 185. Unde modo, ſi per verticem E ducatur recta EH, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO ſit ad rectangulum EOF, veluti eſt EH ad EF;
*art. 99. erit * in hac eadem ratione quadratum cujuſvis alterius ordinatæ PV ad rectangulum EVF. Et, quemadmodum rectam iſtam EH appellare licebit parametrum diametri EF; ita, ſi jungatur FH, cum qua conveniat in X ordinata quævis PV;

erit

erit*PV quadratum æquale rectangulo EVX, & *art.100.
conſequenter minus rectangulo, quod fit ex parametro EH in abſciſſam correſpondentem EV, rectangulo alio, quod, inſiſtens * eidem abſciſſæ, *art.101.
eſt ſimile, ſimiliterque poſitum ei, quod fit ex parametro EH in ipſam diametrum EF.

186. Hinc ulterius deſcribere licebit hyperbolam, datis longitudine, & poſitione, non modo diametro principali AB, & ipſius parametro AD, verum etiam alia quavis diametro EF, & parametro ejus EH. Unde etiam *, *art.169.
ſicuti recta EH, ducta per verticem E ipſius 170.
diametri EF, ordinatis ſuis æquidiſtanter, contingere debet hyperbolam in ſolo puncto E; ita omnis alia recta, quæ, ducta ex eodem vertice E angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in alio puncto alicui hyperbolarum occurret. Ex quo fiet, ut ſicuti ex diametro principali tranſire licuit ad alias diametros; ſic ex qualibet alia diametro, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes poſſit perveniri.

187. Nam ſemper ac eædem ſunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamentale, quod paulo ante * oſtenſum eſt, *art.174.
relate ad diametrum principalem, poterit eadem omnino ratione demonſtrari de quavis alia diametro EF. Unde omnes illæ æqualitates triangulorum, trapetiorumque, ſuperius oſtenſæ, in ordine ad diametrum principalem, obtinebunt quoque reſpectu cujuſvis alterius diametri EF: proindeque, iis adhibitis, oſtendere rurſus licebit, eſſe diametros hyperbolæ omnes rectas, ductas per centrum, & utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminatas, nec non alias iſtas diame-

troſ

tros eaſdem habere propriëtates cum ipſa diametro EF.

188. Cæterum, præter eas, quæ tranſeunt per centrum, nulla alia recta eſſe poteſt diameter hyperbolæ. Nam, ut recta aliqua eſſe poſſit hyperbolæ diameter, neceſſe eſt, ut biſecet rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad eandem hyperbolam terminatas. Sit ergo TY recta poſitione data, cui debent eſſe parallelæ eæ omnes, quæ bifariam a diametro dividuntur. Jamque, ſi ea parallela ſit ordinatis diametri principalis AB, erit ipſa AB diameter quæſita. Quod ſi ſecus accidat, ſit ei æquidiſtans ſubtenſa AM, quæ occurrat eidem hyperbolæ in
*Art. 181. alio puncto M; & rurſus quæſita diameter erit * recta EF, quæ, ducta per centrum C, biſecat in O ſubtenſam AM.

IV. *Diametrorum hyperbolæ aliæ communes affectiones afferuntur.*

189. PRæter recenſitas proprietates, plures alias communes habent hyperbolæ diametri. Ac primo quidem quælibet earum non alias rectas, utrinque ad unam hyperbolarum terminatas, bifariam dividit, quam quæ ordinatim ad ipſam diametrum applicantur.
FIG. 15. Si enim fieri poteſt, diameter hyperbolæ AB biſecet in S rectam Pp, quæ, utrinque ad unam hyperbolarum terminata, non ſit ipſi AB ordinatim applicata. Quia ergo, ducta ſubtenſa AM, ipſi Pp parallela, & biſecta ea in O, debet * recta
*Art. 181. CO ſecare Pp bifariam in V; biſecta erit eadem Pp, tam in S, quam in V: quod fieri non poteſt.

190.

190. Hinc autem ſequitur viciſſim, quod, ſi aliqua hyperbolæ diameter biſecet rectam aliquam, utrinque ad unam hyperbolarum terminatam; hæc eſſe debet diametri illius ordinata. Unde ulterius eruitur, quod, ſi recta aliqua biſecet alias duas æquidiſtantes, & utrinque ad unam ex hyperbolis terminatas; ea ſit oportet diameter ipſius hyperbolæ, atque adeo tranſibit per centrum. Nam aliter, ducta per punctum biſectionis unius ex rectis æquidiſtantibus, & centrum recta alia; hæc, velut diameter, biſecabit quoque rectam aliam æquidiſtantem: quod fieri non poteſt.

191. Id vero quum ita ſit, facile erit, cujuſvis datæ hyperbolæ, ſive centrum, ſive diametrum aliquam reperire. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam hyperbolam, vel etiam intra ejus oppoſitam rectas duas æquidiſtantes, & utrinque ad eandem terminatas. Nam, ſicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit; ſic & punctum, quod biſecat diametrum iſtam, ejuſdem centrum exhibebit. Speciatim autem in omni hyperbola reperire licebit diametrum, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat.

192. Comperta enim quacumque hyperbolæ diametro EF, quæ oblique inſiſtat ſuis ordinatis, deſcribatur ſuper ea ſemicirculus EPF, qui neceſſario ſecabit unam hyperbolarum in puncto aliquo P. Secet itaq; in puncto iſto hyperbolam, tranſeuntem per verticem E. Jamque, ſi jungatur recta PE, quæ velut ordinata referatur ad diametrum AB; fiet ipſa AB diameter quæſita. Nam, ob rectas PE, EF biſectas in G, & C, FIG. 16.

EG eſt GP, ut CE ad CF. Quare, quum ſiat AB ipſi PF parallela, erit angulus CGE æqualis angulo FPE: & propterea, ſicuti rectus eſt angulus FPE, ſic etiam angulus CGE rectus erit.

193. Diameter iſta AB vocatur axis ipſius hyperbolæ, ſuper qua ſi circulus deſcribatur, is medius cadet inter binas hyperbolas oppoſitas. Unde prono alveo fluit, præter illam, nullam aliam dari diametrum, quæ cum ordinatis ſuis rectos angulos conſtituat. Quod ſi autem diameter quæratur, quæ cum ſuis ordinatis efficiat ad partem unam datum quemvis angulum acutum; ſatis erit, ſuper axe AB deſcribere ſegmentum circuli, quod angulum illum ſuſcipiat. Quum enim ſegmentum iſtud utrique hyperbolarum occurrat, ſi vertices axis cum punctis occurſus per rectas totidem jungantur; fient rectæ iſtæ ordinatæ diametrorum, quæ quæſito ſatisfacient.

194. Si quæſtio ſit de determinanda poſitione ordinatarum alicujus diametri datæ, in ſubſidium poterit advocari ſequens theorema: quod,
FIG. 14. ſi ex verticibus A, & E duarum quarumvis diametrorum AB, EF ordinatæ ad ipſas demittantur AO, EG; eſſe debet, ut CG ad AG, ita CO
*art. 174. ad EO. Nam, ducta OL, ipſi EG parallela; fiet *,
187. ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE. Quare erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CO ad CE; & conſequenter, convertendo, erit etiam, ut CG ad AG, ita CO ad EO.

195. Qua autem ratione, ope hujus theorematis, determinari poſſit poſitio ordinatarum cujuſvis diametri datæ; haud difficile erit intelli-

ligere. Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur ex vertice ejus A recta AM, quæ hyperbolam, tranſeuntem per A, ſecet in M. Tum, ſecta ea biſariam in O, jungatur CO, quæ eidem hyperbolæ occurrat in E. Extendatur poſtea CA ſubinde in G, ut CG ſit ad AG, veluti eſt CO ad AO. Et, juncta recta EG, erit recta iſta EG ordinata una ipſius AB.

196. Cæterum in hyperbola, non ſecus ac in ellipſi, quælibet diameter ſuam habet conjugatam. Sed conjugatæ iſtæ diametri, etſi tranſeant per centrum æquidiſtanter ordinatis diametrorum, ad quas velut conjugatæ referuntur; ad hyperbolas tamen oppoſitas minime terminantur. Sit enim AB hyperbolarum oppoſitarum diameter aliqua, & per centrum C agatur recta KL ordinatis ejus parallela. Quia igitur rectæ, quæ per vertices A, & B ducuntur æquidiſtanter iiſdem ordinatis, contingunt hyperbolas dumtaxat in punctis A, & B; plane neceſſe eſt, ut etiam recta KL, inter eas poſita, cum neutra hyperbolarum conveniat. FIG. 16.

197. Etſi autem recta KL, ducta per centrum C, æquidiſtanter ordinatis diametri AB, nulli hyperbolarum occurrat; meretur tamen diametri nomen, quia dividit biſariam rectas omnes, ipſi AB parallelas, & ad hyperbolas oppoſitas utrinque terminatas. Sit enim MP aliqua iſtarum rectarum, quæ conveniat cum KL in V. Jamque, actis ad ipſam AB ordinatis MN, PQ, fient iſtæ æquales inter ſe. Unde, quum æqualia ſint etiam rectangula ANB, AQB; additis iis æqualibus quadratis CA, CB, erunt pariter æqualia qua-

drata CN, CQ. Duæ igitur CN, CQ æquales ſient inter ſe. Quare, ob parallelogramma CM, CP, erunt pariter æquales duæ MV, PV: & propterea tota MP biſecta erit in V.

198. Sed notetur hoc loco velim, quod, ut recta KL dici poſſit conjugata ipſius AB, neceſſe eſt, ut perinde ac evenit in ellipſi, ſit ſecta bifariam in centro C, & ſit media proportionalis inter ipſam AB, & parametrum ejus AD: qua ratione, etſi ad hyperbolas oppoſitas non terminetur, dicentur vertices ejus puncta K, & L. Interim, ſi deſcribantur binæ aliæ hyperbolæ,
FIG. 17. quarum viciſſim KL ſit diameter principalis, & AB diameter conjugata; locabuntur in aliis iſtis hyperbolis vertices omnium aliarum conjugatarum: quæ propterea priorum hyperbolarum conjugatæ dicentur.

199. Eſto enim EF alia quævis diameter priorum hyperbolarum, & ſit PR ejus conjugata. Jamque, demiſſa ſuper KL recta PQ, ipſi AB parallela, eo res redit, ut oſtendamus, PQ quadratum eſſe ad rectangulum KQL, veluti eſt AB quadratum ad KL quadratum. Id vero oſtendemus in hunc modum. Ducantur ad diametros AB, EF ordinatæ EG, AO. Et quoniam
* art. 194. CG eſt * ad AG, ut CO ad EO; erit, dividendo, ut CA ad AG, ita CE ad EO; &, duplicatis antecedentibus, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Quumque fiat etiam, ut AB ad BG, ita EF ad FO; erit, ut AB quadratum ad rectangulum AGB, ita EF quadratum ad rectangulum EOF: & propterea, ob hyperbolam, erit pariter, ut KL quadratum ad EG quadratum, ita PR quadratum ad AO quadratum: adeoque conjugatæ

KL,

KL, PR, ſive ipſarum ſemiſſes CK, CP erunt in ratione ordinatarum EG, AO.

200. Ducantur nunc rectæ EI, AH, PT, ipſis CP, EG, CE reſpective parallelæ. Et quoniam CT eſt ad CK in ratione compoſita ex CT ad CP, & ex CP ad CK; erit CT ad CK in ratione compoſita ex AH ad AO, & ex AO ad EG; hoc eſt in ſimplici ratione, quam habet AH ad EG, ſive CE ad CO, ſive EI ad AO. Jam vero EI eſt ad AO in ratione compoſita ex EI ad EG, & ex EG ad AO; hoc eſt in ratione compoſita ex CP ad CQ, & ex CK ad CP; ſive etiam in ſimplici ratione, quam habet CK ad CQ. Quare erit ex æquali, ut CT ad CK, ita CK ad CQ. Unde, quum ſiat CK quadratum æquale rectangulo TCQ; dempto utroque ex communi quadrato CQ, erit rectangulum KQL æquale rectangulo TQC.

201. Similiter autem, quum CG ſit ad CA, ut CO ad CE, ſive, ut CA ad CI; erit CA quadratum æquale rectangulo ICG: proindeque, dempto utroque ex communi quadrato CG, erit rectangulum AGB æquale rectangulo IGC; adeoque rectangulum IGC erit ad EG quadratum, ut rectangulum AGB ad idem EG quadratum, ſive, ut AB quadratum ad KL quadratum. Sed rectangulum IGC eſt ad EG quadratum in ratione compoſita ex IG ad EG, & ex CG ad EG; hoc eſt in ratione compoſita ex PQ ad CQ, & ex PQ ad TQ; ſive, componendo has rationes, ut PQ quadratum ad rectangulum TQC, ſive KQL. Et igitur erit, ex æquali, ut PQ quadratum ad rectangulum KQL, ita AB quadratum ad KL quadratum.

202. Nolo autem hoc loco reticere, quod, FIG. 16. ſi relate ad conjugatam KL capiantur velut ordinatæ ſemiſſes earum rectarum, quæ, utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminatæ, bifariam ab ipſa dividuntur; proprietas ejus alia quidem erit ab ea, quæ competit diametro AB, ad quam ipſa velut conjugata refertur. Accidens enim ipſius AB eſt, ut quadratum cujuſque ordinatæ MN ſit ad rectangulum ANB, ſive ad differentiam quadratorum CN, CA, ut eſt AD ad AB, ſive, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum. Sed proprietas conjugatæ KL eſt, ut quadratum cujuſvis ordinatæ MV ſit ad ſummam quadratorum CV, CK, veluti eſt AB quadratum ad KL quadratum. Quæ ſane differentia minime locum habet in ellipſi; quum in ea utrumque genus diametrorum eadem omnino gaudet proprietate.

203. Oſtendetur id vero in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum ANB, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum, ſive etiam, ut eſt CK quadratum ad CA quadratum. Quare, invertendo, erit, ut rectangulum ANB ad MN, ſive CV quadratum, ita CA quadratum ad CK quadratum. Et, addendo terminos ſecundæ rationis terminis primæ, erit quoque, ut AN, ſive MV quadratum ad ſummam quadratorum CV, CK, ita CA quadratum ad CK quadratum, ſive etiam, ita AB quadratum ad KL quadratum.

204. Sicuti autem KL vocatur conjugata ipſius AB, ſic viciſſim AB dicetur conjugata ipſius KL. Quin etiam, ſi quemadmodum KL eſt media proportionalis inter AB, & AD; ſic fiat, ut AB ſit media proportionalis inter KL, & KI,

di-

dicetur KI parameter ipſius KL: qua ratione erit, ut MV quadratum ad ſummam quadratorum CV, CK, ita KI ad KL. Quum vero in hyperbola ſint duo diametrorum genera; ut eas a ſe invicem diſtinguamus, vocabimus in poſterum diametros primas, quæ ad hyperbolas oppoſitas terminantur; & diametros ſecundas, quæ minime cum hyperbolis conveniunt. Quumque cuilibet primæ diametro alia velut ſecunda, ſeu conjugata correſpondeat; ipſe etiam axis primus habebit ſuum axem ſecundum, ſeu conjugatum.

V. *Tangentium, & ſecantium hyperbolæ accidentia principaliora.*

205. Circa tangentes hyperbolæ jam vidimus *, rectam, quæ ex vertice alicujus diametri ducitur æquidiſtanter ſuis ordinatis, contingere hyperbolam in ſolo illo vertice; nec aliam rectam cadere in locum, hyperbola, & tangente contentum. Inde autem duo conſequuntur. Primum eſt, quod ad unum idemque punctum hyperbolæ unica tantum tangens duci poteſt. Alterum, quod recta, contingens hyperbolam in puncto aliquo, debet eſſe parallela ordinatis ejus diametri, quæ pertinet ad punctum contactus. *art. 169, 170. 186

206. Contingat nunc hyperbolam recta EI in puncto E, vertice diametri EF. Jamque, ſi ea conveniat cum alia quavis diametro AB in puncto I, ad quam etiam ex puncto contactus E ordinata demittatur EG; erit, ut CG ad CA, ita CA ad CI. Ducatur enim ad diametrum EF FIG. 14.

ordinata AO; & per punctum O agatur OL,
*art. 174. ipſi EG parallela. Per ea ergo, quæ ſuperius *
187. oſtenſa ſunt, erit, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque, ob parallelas AO, EI, eſt etiam, ut CO ad CE, ita CA ad CI. Itaque erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI.

207. Ex hoc theoremate, facile erit, derivare omnes alias proprietates, quæ hyperbolæ tangentibus competunt. Sed ejus converſum nullo etiam negotio licebit oſtendere: nimirum, quod, ſi CG ſit ad CA, veluti eſt CA ad CI; recta EI contingere debet hyperbolam in ſolo
*art. 174. puncto E. Nam, iiſdem poſitis, erit rurſus *,
187. ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL eſt ad CG, ut CO ad CE; itemque, ex hypotheſi, CG eſt ad CA, ut CA ad CI. Itaque erit, ex æquali, ut CO ad CE, ita CA ad CI: proindeque, quum duæ AO, EI parallelæ ſiant inter ſe, plane ne-
*art. 205. ceſſe eſt *, ut EI contingat hyperbolam in E.

208. Quantum ad ſecantes hyperbolæ, hoc in iis obtinet theorema: quod, ſi duæ quævis
FIG. 18. ſecantes MO, PQ ſibi mutuo occurrant in R; rectangula ſub ſegmentis ipſarum MRO, PRQ, ſunt, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, quarum ipſæ MO, PQ ſunt ordinatæ. Ut autem hoc theorema nullam habet difficultatem, quum utraque ſecantium eſt diameter prima; ita ponamus primo, unam earum PQ eſſe diametrum primam, alteram vero MO eſſe ordinatam diametri AB, cujus KL ſit conjugata. Oſtendendum eſt ergo, rectangulum MRO eſſe ad rectangulum PRQ, ut eſt KL quadratum ad PQ quadratum.

209.

209. Ut id oſtendamus, demittantur ſuper KL rectæ MS, PT, RV, ipſi AB parallelæ. Et quoniam CT quadratum eſt ad CV quadratum, ut PT quadratum ad RV, ſive MS quadratum; aut etiam *, ut differentia (vel ſumma) quadrato- *Art. 96. rum CT, CK ad differentiam (vel ſummam) qua- 102. dratorum CS, CK: capiendo differentias antecedentium, & conſequentium, erit quoque, ut CK quadratum ad idem CK quadratum una cum differentia quadratorum CV, CS, ita CT quadratum ad CV quadratum; ſive etiam, ita CP quadratum ad CR quadratum. Unde, capiendo differentias inter antecedentem, & conſequentem cujuſque rationis, erit quoque, ut CK quadratum ad differentiam quadratorum CV, CS, ita CP quadratum ad differentiam quadratorum CP, CR.

210. Quum autem differentia quadratorum CV, CS ſit æqualis rectangulo MRO, & differentia quadratorum CP, CR adæquet rectangulum PRQ; erit pariter, ut CK quadratum ad rectangulum MRO, ita CP quadratum ad rectangulum PRQ; & permutando, ut CK quadratum ad CP quadratum, ita rectangulum MRO ad rectangulum PRQ. Sed CK quadratum eſt ad CP quadratum, ut KL quadratum ad PQ quadratum. Itaque erit, ex æquali, ut KL quadratum ad PQ quadratum, ita rectangulum MRO ad rectangulum PRQ.

211. Ponamus ſecundo, neutram rectarum MO, PQ eſſe diametrum primam; ſed priorem FIG. 19. quidem MO referri ut ordinatam ad diametrum AB, cujus KL ſit conjugata; alteram vero PQ ordinatam eſſe diametri EF, quæ habeat GI

pro

pro ſua conjugata. Oſtendendum eſt ergo, rectangulum MRO eſſe ad rectangulum PRQ, ut eſt KL quadratum ad GI quadratum. Id vero liquet abunde, ſi diameter TV, ducta per punctum R, fuerit ex numero earum, quæ primæ dicuntur.
art. 208. Erit enim, ex oſtenſis, ut rectangulum MRO ad rectangulum TRV, ita KL quadratum ad TV quadratum; &, ut rectangulum TRV ad rectangulum PRQ, ita TV quadratum ad GI quadratum. Quare, ex æquo ordinando, erit, ut rectangulum MRO ad rectangulum PRQ, ita KL quadratum ad GI quadratum.

212. Quod ſi diameter TV, ducta per pun-
FIG. 20. ctum R, fuerit ex illarum numero, quæ ſecundæ dicuntur; tunc, ad idem oſtendendum, opus erit hoc lemmate: quod, ſi diameter quævis ſecunda TV occurrat in R rectæ MO, ad hyperbolas oppoſitas utrinque terminatæ, ſumma quadratorum CV, CR eſſe debet ad rectangulum MRO, ut eſt quadratum ipſius TV ad quadratum ex conjugata ejus ſecundæ diametri, ad quam MO, velut ordinata refertur. Hoc enim lemmate præmiſſo, rurſus clare liquet, rectangulum MRO eſſe ad rectangulum PRQ, veluti eſt KL quadratum ad GI quadratum.

213. Illiuſmodi vero lemma oſtendemus in hunc modum. Sit PQ diameter ſecunda, quæ
FIG. 21. ipſi MO, utrinque ad hyperbolas oppoſitas terminatæ, occurat in R. Sit autem AB ſecunda diameter, ad quam MO velut ordinata refertur, ſitque KL ejus conjugata. Oſtendendum eſt ergo, ſummam quadratorum CP, CR eſſe ad rectangulum MRO, ut eſt PQ quadratum ad KL quadratum. Hunc in finem demittantur ſuper

per KL rectæ MS, PT, RV, ipſi AB parallelæ. Et quoniam CT quadratum eſt ad CV quadratum, ut PT quadratum ad RV, ſive MS quadratum; aut etiam*, ut ſumma quadratorum CT, CK ad differentiam quadratorum CS, CK: capiendo differentias antecedentium, & conſequentium, erit quoque, ut CK quadratum ad CS quadratum, multatum ſumma quadratorum CK, CV, ita CT quadratum ad CV quadratum, ſive etiam, ita CP quadratum ad CR quadratum.

*art. 96. 202.

214. Hinc, addendo antecedentes conſequentibus, erit quoque, ut CK quadratum ad differentiam quadratorum CS, CV, ita CP quadratum ad ſummam quadratorum CP, CR. Sed differentia quadratorum CS, CV eſt æqualis rectangulo MRO. Itaque erit, ut CK quadratum ad rectangulum MRO, ita CP quadratum ad ſummam quadratorum CP, CR; & permutando, ut CK quadratum ad CP quadratum, ita rectangulum MRO ad ſummam quadratorum CP, CR; & invertendo, ut CP quadratum ad CK quadratum, ita ſumma quadratorum CP, CR ad rectangulum MRO. Sed CP quadratum eſt ad CK quadratum, ut PQ quadratum ad KL quadratum. Itaque erit, ex æquali, ut ſumma quadratorum CP, CR ad rectangulum MRO, ita PQ quadratum ad KL quadratum.

215. Fieri autem poteſt, ut una ex ſecantibus tangens evadat: nimirum, quum puncta duo ſectionis coeunt in unum. Id vero quum contingit, rectangulum ſub ejus ſegmentis vertetur in quadratum ipſius tangentis. Unde inter quadratum iſtud, & rectangulum, contentum

tum

tum ſub ſegmentis alterius, eadem adhuc ratio obtinebit. Sed nihil obſtat, quin utraque ſecans vertatur in tangentem: quo caſu ambo quidem rectangula abibunt in quadrata ipſarum tangentium, & inter quadrata iſta eadem ſemper ratio locum habebit.

216. Si ergo ex puncto, ſumpto extra hyperbolam, ducantur ad eam tangentes duæ; erunt quadrata iſtarum tangentium inter ſe, ut ſunt quadrata ex conjugatis diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus. Et, ſi ex eodem puncto ducantur rectæ duæ, quarum una tangat hyperbolam, altera eandem ſecet; erit quadratum tangentis ad rectangulum, ſub ipſius ſecantis portionibus contentum, ut eſt quadratum ex conjugata diametri, quæ pertinet ad punctum contactus, ad quadratum ex conjugata diametri illius, ad quam ea ſecans velut ordinata refertur.

217. Cæterum ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, prono alveo fluunt ſequentia duo theoremata. Primum eſt, quod, ſi duabus hyperbolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tum tangentes, cum ſecantes; rectangula ſub ſecantium ſegmentis proportionalia eſſe debent quadratis, quæ ex tangentibus fiunt. Alterum eſt, quod, ſi duabus ſecantibus hyperbolæ parallelæ fuerint binæ aliæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tam illæ, quam iſtæ; rectangula ſub ſegmentis illarum proportionalia ſint oportet rectangulis, quæ ſub iſtarum ſegmentis continentur.

VI.

VI. *Quæ ſint aſymptoti hyperbolæ, quæve earum proprietates,*

218. Pertinet ad hunc locum doctrina aſymptotorum hyperbolæ: ut quæ ſunt rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, ſive infinite a centro diſtantibus. Ut eas determinemus, referat AB axem primum hyperbolæ, ſitq; KL axis ejus conjugatus. Deſcribatur circa duos iſtos axes AB, KL parallelogrammum EFGH. Et diagonales hujus parallelogrammi EG, FH, tranſeuntes per centrum C, hyperbolæ aſymptotos nobis exhibebunt: quæ quidem ſortitæ ſunt tale nomen, quia productæ in infinitum, etſi continuo ad hyperbolam accedant, numquam tamen cum ea conveniunt. FIG. 22.

219. Neque vero difficile id erit oſtendere. Nam, ducto ex puncto quovis hyperbolæ M ad axem AB ordinata MN; erit *, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita CK, ſive AE quadratum ad CA quadratum. Jam vero, ſi eadem ordinata MN conveniat cum EG in O, AE quadratum erit ad CA quadratum, ut NO quadratum ad CN quadratum. Quare erit, ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita NO quadratum ad CN quadratum: & propterea, ſicuti rectangulum ANB minus eſt quadrato ex CN, ita quoque MN quadratum minus erit quadrato, quod fit ex NO; adeoque punctum O erit ultra punctum M. *art. 96. 198.

220. Quod autem aſymptoti continuo ad hyperbolam accedant, demonſtratur hoc pacto.

Ex-

Extendatur MN uſque donec cum utraq; aſymptoto conveniat in O, & R. Ut ergo EH ſecta eſt bifariam in A, ita quoque OR biſecta erit in N: proindeque differentia quadratorum MN, NO æqualis erit rectangulo OMR. Et quoniam in eadem ratione, quam habet AE quadratum ad CA quadratum, eſt, tam MN quadratum ad rectangulum ANB, quam NO quadratum ad CN quadratum; erit quoque, ut AE quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad idem CA quadratum. Unde, quum rectangulum OMR æquale fiat quadrato ex AE, erit rectangulum OMR ejuſdem ubique magnitudinis: proindeque, non poterit augeri latus unum MR, niſi minuatur eodem tempore latus alterum MO: & idcirco aſymptoti ad hyperbolam continuo accedent.

221. Hinc aliud agentes, jam illud demonſtravimus, quod, ſi axi ſecundo KL parallela agatur OR, ad utramque aſymptotum terminata, rectangulum OMR, contentum ſub ejus ſegmentis, æquale eſſe debet quadrato, quod fit ex dimidio ejus axis AE, ſive CK: adeo nempe, ut, ſi *or* ſit altera recta, eidem axi parallela, æqualia erunt inter ſe rectangula duo OMR, *omr*. Sed, ſi eædem rectæ OR, *or* alteri cuivis æquidiſtanter ducantur; adhuc rectangula illa æqualia erunt inter ſe. Nam, quum maneat eadem, tam ratio ſegmentorum MO, *mo*, quam ratio ſegmentorum MR, *mr*; manebit quoque eadem ratio, quæ ex iis componitur, hoc eſt ratio rectangulorum OMR, *omr*. Unde, ſicuti hæc ratio prius erat æqualitatis, ſic rectangula OMR, *omr* perpetuo manebunt æqualia inter ſe.

221.

222. Quum autem eadem recta OR occurrat hyperbolæ in duobus punctis M, & S; ob eandem rationem æqualia erunt pariter rectangula OMR, OSR: quod quidem fieri non poteſt, niſi æquales ſint inter ſe portiones duæ MO, SR. Unde jam illud liquet, quod ſi recta, intra unam hyperbolarum ducta, cum utraque aſymptoto conveniat, portiones ejus, hyperbola, & aſymptotis interceptæ, æquales eſſe debent inter ſe. Ex quo facile erit inferre, quod, ſi recta quævis, ut EH, ad utramque aſymptotum terminata, biſecta ſit in puncto A, in quo occurrit hyperbolæ, ea ſit oportet tangens ipſius hyperbolæ; quodque viciſſim, ſi recta EH contingat hyperbolam in A, & utrinque ad aſymptotos terminetur, ea ſecari debet bifariam in puncto contactus A.

223. Præterea, ſicuti, parallelis exiſtentibus rectis OR, *or*, æqualia eſſe debent * rectangula OMR, *omr*; ita, ſi altera ipſarum, ut *or*, vertatur demum in tangentem EH, fiet rectangulum OMR æquale rectangulo EAH, ſive etiam * quadrato ex AE. Et quoniam, ducta ex puncto contactus A diametro AB, ipſi OR occurrente in N, eſt, ut NO quadratum ad CN quadratum, ita AE quadratum ad CA quadratum: capendo differentias inter antecedentes, & conſequentes, erit quoque, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AE quadratum ad CA quadratum, ſive etiam, ita EH quadratum ad AB quadratum. Unde, quum MN ſit ordinata ipſius AB, facile erit inferre, tangentem EH æqualem eſſe diametro conjugatæ ejuſdem AB.

* *art.* 220.

* *art.* 221.

224. Hinc autem, ſicuti clare liquet, aſymptotos

tos eſſe diagonales, non modo ejus parallelogrammi, quod circa axes conjugatos deſcribitur, verum etiam cujuſvis alterius parallelogrammi, deſcripti circa binas quaſvis alias diametros conjugatas; ſic liquido etiam patet, quod, ſi alicui diametro ſecundæ KL intra aliquam hyperbolarum parallela ducatur OR, quæ cum utraque aſymptoto conveniat, rectangulum OMR, contentum ſub ſegmentis ejus, æquale eſſe debet quadrato, quod ſit ex dimidio ejus diametri CK.

225. Quod, ſi per aliquod hyperbolæ punctum M ducatur recta MPQ, parallela alicui diametro primæ AB, quæ cum utraque aſymptoto conveniat; tunc rectangulum PMQ, contentum ſub ſegmentis ejus, æquale erit quadrato, quod ſit ex dimidio ipſius AB. Nam rectangulum OMR eſt ad rectangulum PMQ in ratione compoſita ex MO ad MP, & ex MR ad MQ; ſive etiam in ratione compoſita ex AE, ſive CK ad CA, & ex AH, ſive CK ad CA; hoc eſt, componendo has rationes, ut CK quadratum ad CA quadratum. Quare, ſicuti rectangulum OMR eſt æquale quadrato ex CK; ſic erit rectangulum PMQ æquale quadrato ex CA.

226. Illud quoque non eſt hic reticendum, FIG. 23. quod, etſi rectæ MO, *mo* non jaceant in directum cum rectis MR, *mr*; modo tamen parallelæ ſint inter ſe, tam iſtæ, quam illæ, ſemper rectangulum OMR æquale eſſe debet rectangulo *omr*; quandoquidem manet ſemper eadem, tam ratio rectarum MO, *mo*, quam ratio rectarum MR, *mr*. Plane vero, ſi rectæ MO, *mo* ducantur parallelæ aſymptoto CH, & rectæ MR, *mr*

pa-

parallelæ aſymptoto CE; tunc ipſis MR, *mr* æquales fient portiones CO, C*o*: & propterea æqualia erunt pariter rectangula COM, C*om*.

227. Cæterum, quod aſymptoti ſint rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, ſive infinite a centro diſtantibus, facile quidem erit oſtendere. Contingat enim hyperbolam in puncto quovis E recta EI, quæ conveniat cum axe AB in puncto I. Jamque, abeunte in infinitum puncto contactus E, fiet EI aſymptotus hyperbolæ, ſi punctum I accedat ad centrum C, & præterea tangens altera AX fiat æqualis dimidio axis conjugati KL. Horum autem utrumque facili negotio licebit oſtendere. FIG. 24.

228. Nam primo, demiſſa ad axem AB ordinata EG, erit *, ob tangentem EI, ut CG ad CA, ita CA ad CI. Sed, abeunte in infinitum puncto E, CG eſt infinite major reſpectu ipſius CA. Quare etiam CA erit infinite major relate ad CI: & propterea punctum I ad centrum accedet. Deinde in eadem hypotheſi rectangulum AGB tantundem valet, ac CG quadratum. Unde erit, ut EG quadratum ad rectangulum AGB, ita idem EG quadratum ad CG quadratum. Sed EG quadratum eſt * ad rectangulum AGB, ut CK quadratum ad CA quadratum; itemque EG quadratum eſt ad CG quadratum, ut AX quadratum ad CA quadratum. Itaque erit ex æquali, ut CK quadratum ad CA quadratum, ita AX quadratum ad idem CA quadratum: proindeque duæ CK, AX æquales erunt inter ſe.

* *art.* 206.

* *art.* 96. 198.

229. Ex eo autem, quod aſymptoti habendæ ſunt tanquam rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, fit, ut eædem con-

ſiderari quoque poſſint, velut ultimæ ejuſdem hyperbolæ diametri. Unde, ſicuti in deſcriptio-
FIG. 13. ne hyperbolæ, ſuperius tradita, duæ regulæ AX, BZ fieri debent parallelæ, non modo inter ſe, verum etiam alicui ex ipſis aſymptotis, quum extrema hyperbolæ puncta deſcribuntur; ita facile erit inferre, extrema iſta puncta tunc demum deſcribi, quum quælibet portionum DF, AG, BO, IQ adæquat conjugatam ipſius AB. Atque hinc modo nullo negotio determinare licebit, cui demum hyperbolarum occurrere debeat, ſive recta AX, ducta ex vertice A, ſive recta BZ, ducta ex vertice B.

CAPUT V.

Deſcriptio parabolæ, & aliæ ejus diametri.

230. RElìquum jam eſt, ut determinationem aggrediamur aliarum diametrorum, quarum parabola eſt capax. Et quidem aliæ parabolæ diametri paulo aliter determinantur, quam, quæ ellipſi, & hyperbolæ
Art. 84. competunt. Sed, ſicuti novimus *, utramque harum curvarum abire in parabolam, quum, abeunte in infinitum vertice altero diametri principalis, fit ipſa diameter infinitæ longitudinis; ſic quoque patebit, in hac eadem hypotheſi, determinationem diametrorum, quæ locum habuit in ellipſi, & in hyperbola, mutari in eam, quæ obtinet in parabola. Atque ita quoque, etſi parabola in plano paulo aliter deſcribatur, quam

el-

ellipſis, & hyperbola; attamen ejus deſcriptionem ex ipſa illa eruere licebit, quam pro ellipſi, & hyperbola ſuperius attulimus.

I. *Qua ratione parabola in plano deſcribi poſſit, oſtenditur.*

231. DEntur in plano aliquo rectæ duæ AB, AD, ſibi mutuo occurrentes in A, earumque prior AB, terminata ad punctum A, indefinita verſus B, referat diametrum parabolicæ ſectionis, in cono factæ; altera AD, longitudine data, exhibeat, tum parametrum ejuſdem diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Oſtendendum eſt ergo, qua ratione in planum iſtud ſectio illa transferri poſſit. Ducatur per punctum D recta DE, ipſi AB parallela; & interea ac regula AX revolvitur circa verticem diametri A, feratur regula altera GZ ſubinde ſuper AD, ut maneat ipſi AB, vel DE jugiter parallela, & abſcindat ex AD, producta ſi opus, portionem AG, æqualem ipſi DF, quam ex DE abſcindit eodem tempore regula prior AX. Dico, curvam, quæ deſcribitur continuis interſectionibus regularum AX, GZ, parabolam, quam quærimus, eſſe. FIG. 25.

232. Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipſi AD parallela, quæ conveniat cum AB in N. Jamque erit punctum M in quæſita parabola, ſi utique oſtendi * poſſit, *art. 106. MN quadratum æquale eſſe rectangulo DAN. Id vero oſtendetur in hunc modum. Quadratum ex MN eſt ad rectangulum DAN in ratione compoſita ex MN ad AD, & ex MN ad AN;

ſive etiam in ratione compoſita ex AG ad AD, & ex AD ad DF. Sed duæ iſtæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AG ad DF. Itaque erit, ut MN quadratum ad rectangulum DAN, ita AG ad DF: & propterea, ſicuti duæ AG, DF inter ſe ſunt æquales; ita erit MN quadratum æquale rectangulo DAN.

233. Ut autem allata parabolæ deſcriptio melius intelligatur, notabimus primo, quod, ubi regula AX fertur circulariter ex AD verſus AB, tunc regula altera GZ ferri debet rectilineo ſuo motu ex AB verſus DE: Et quo-
* art. 231. niam motus harum regularum ea lege fieri * debet, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, maneant perpetuo æquales inter ſe: perſpicuum eſt, quod, ubi regula AX pervenit ad AB, infinitamque adeo portionem abſcindit ex DE; tunc regula altera GZ ab eadem AB infinite recedet, quia hac ratione ipſa quoque ex AD infinitam portionem abſcindet.

234. Notabimus ſecundo, quod, ubi eadem regula AX pergit moveri circulariter ex AB verſus AH, quam ipſi AD in directum eſſe ſuppono; tunc regula altera GZ intelligenda ſit ex infinita diſtantia, ad quam abierat, accedere rurſus ad AB per plagam oppoſitam. Et quoniam motus earundem regularum ea ſemper le-
* art. 231. ge perfici * debet, ut portiones DF, AG, quas abſcindunt ex ipſis DE, AD, ex altera parte productis, maneant continuo æquales inter ſe: liquet, quod, ubi regula AX pervenit ad AH, nullamq; adeo portionem abſcindit ex DE; tunc altera GZ ſuper AB oportet reperiatur, quia hac

ra-

ratione ipſa etiam ex AD nullam portionem abſcindet.

235. Unde modo luce clarius apparet, parabolam conſtare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum poſitis, quæ ſimul junguntur in puncto A, vertice ejuſdem diametri. Una ſiquidem deſcribitur, quum regula AX fertur circulariter ex AD verſus AB, eademque continetur in angulo BAD. Altera deſcribitur, quum eadem AX pergit moveri ex AB verſus AH; & pars iſta continetur in angulo BAH. Nec ſane, continuando motum ejuſdem regulæ AX, uſque donec circumferentiam integram abſolvat, aliæ ei partes addi poſſunt.

236. Nam primo, quotieſcumque regula AX fertur ex AH verſus AK, quam ipſi AB in directum eſſe ſuppono; tunc altera GZ proſequetur motum ſuum ex AB verſus DE. Quare, ſicuti fiunt earundem regularum interſectiones in angulo BAD; ita deſcribetur eadem parabolæ portio, quæ in angulo illo continetur. Et ſecundo, ubi eadem regula AX fertur ex AK verſus AD; tunc altera GZ redibit ad AB per plagam oppoſitam. Unde, ſicuti earundem regularum interſectiones fiunt in angulo BAH; ita deſcribetur parabolæ portio illa, quæ eo in angulo continetur.

237. Ex allata autem parabolæ deſcriptione perſpicuum eſt, ei id quidem contingere, ut, ſi per aliquod ejus punctum M ducantur rectæ duæ AX, GZ, prior quidem pertinens ad verticem A, altera diametro AB parallela; portiones DF, AG, quas eædem abſcindunt ex rectis DE, AD productis, ſi opus, ſint

perpetuo æquales inter ſe. Unde, ſi punctum quæratur, in quo recta GZ, ducta æquidiſtanter diametro AB, parabolam ſecat: ſatis erit, ex vertice A ducere rectam AX, quæ abſcindat ex DE producta, ſi opus, portionem DF, æqualem ipſi AG; quandoquidem interſectio rectarum GZ, AX quæſitum punctum exhibebit.

238. Per contrarium vero, ſi quæratur punctum, in quo recta AX, ducta ex vertice A, ſecat parabolam, ducenda erit recta GZ, diametro AB parallela, quæ abſcindat ex AD portionem AG, æqualem ipſi DF; quandoquidem interſectione rectarum AX, GZ quæſitum punctum habebitur. Atque hinc liquet, quod, ſicuti, quum recta AX cadit ſuper AD, quæ ducta eſt per verticem A diametri ordinatis æquidiſtanter, contingit ea parabolam in ſolo puncto A; ita, ubi eadem AX angulum conſtituit cum AD, non ſolum in A, ſed in alio quoque puncto parabolæ occurrere debet.

239. Cæterum, quod allata parabolam deſcribendi ratio ſit illa eadem, qua, tum ellipſis, cum hyperbolæ deſcriptionem ſuperius obtinuimus, facile erit intelligere. Neque enim aliud diſcriminis occurrit, quam quod hic una regularum GZ fertur motu rectilineo ſuper AD. Id vero exinde oritur, quia longitudo diametri AB in parabola eſt infinita. Nam profecto motus circularis vertitur in rectilineum, quotieſcumque centrum ejus motus in infinitum abire ſupponitur; hincque patet veritas ejus, quod paulo ante * dictum eſt: nimirum, quod, ubi GZ ab ipſa AB infinite recedit, intelligenda eſt deinde ex infinita illa diſtantia accedere rurſus ad AB per plagam oppoſitam.

* art. 234.

II.

II. *Quæ ſit poſitio diametrorum parabolæ, & quodnam theorema fundamentale pro iis determinandis.*

240. ETſi parabola, perinde ac ellipſis, & hyperbola, præter eam diametrum, quam in ipſo cono ſortitur, infinitas alias diametros habeat; in ea tamen omnes aliæ iſtæ diametri non convergunt ad punctum ullum, ut contingit in ellipſi, & hyperbola, ſed ſunt omnes, tam inter ſe, quam cum ipſa diametro principali parallelæ. Ut vero id pateat, oſtendendum eſt prius ſequens theorema: quod, ſi EF ſit aliqua rectarum, diametro principali AB æquidiſtantium, quæ biſecet in O ſubtenſam AM, ductam ex vertice A, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela agatur OL; erit ſemper AG æqualis ipſi GL. FIG. 26.

241. Nec ſane difficile erit, theorema iſtud oſtendere. Nam, ſicuti AM dupla eſt ipſius AO; ita, demiſſa ad diametrum AB ordinata alia MN, erit quoque, tum AN dupla ipſius AL, cum MN dupla ipſius OL, ſive EG: proindeque MN quadratum erit quadruplum quadrati, quod ſit ex EG. Sed, ob parabolam *, MN quadratum eſt ad EG quadratum, ut AN ad AG. Quare etiam AN quadrupla erit ipſius AG. Unde, quum ſiat AL dupla ejuſdem AG, biſecta erit AL in G; & conſequenter duæ AG, GL æquales erunt inter ſe. * art. 104.

242. Hinc autem plura inferre licebit, quæ ad id, quod eſt præcipuum, ſenſim nos manu-

ducent. Nimirum primo, ductis rectis AK, EI ipſis EG, AM parallelis, & convenientibus cum aliis EF, AB in K, & I; erit triangulum EGI æquale parallelogrammo AGEK. Eſt enim ex oſtenſis *, AG æqualis GL. Sed GL eſt æqualis ipſi EO, ſeu AI. Quare duæ AG, AI etiam æquales erunt: proindeque, quum ſit tota GI dupla ipſius AG, omnino neceſſe eſt, ut triangulum EGI ſit æquale parallelogrammo AGEK.

*art. 240.

243. Secundo, iiſdem poſitis, erit triangulum AOK æquale parallelogrammo EOAI. Eſt enim, ex oſtenſis *, AG æqualis GL. Sed AG eſt æqualis ipſi EK, & GL eſt æqualis ipſi EO. Quare duæ EK, EO etiam æquales erunt. Unde, quum ſit tota KO dupla ipſius EO: plane neceſſe eſt, ut triangulum AOK, & parallelogrammum EOAI, conſtituta in iiſdem parallelis, inter ſe ſint æqualia.

*art. 240.

244. Tertio, ſi ex alio parabolæ puncto P ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipſis EI, EG parallelæ; erit triangulum PQS æquale correſpondenti parallelogrammo AQRK. Nam triangulum EGI eſt ad triangulum PQS, ut EG quadratum ad PQ quadratum; hoc eſt *, ut AG ad AQ; ſive etiam, ut parallelogrammum AGEK ad parallelogrammum AQRK. Unde, quemadmodum triangulum EGI oſtenſum eſt * æquale parallelogrammo AGEK, ita quoque erit triangulum PQS æquale parallelogrammo AQRK.

*art. 104.

*art. 242.

245. Denique, ſi recta PS, ipſi EI parallela, conveniat cum EF in V; erit triangulum PVR æquale correſpondenti parallelogrammo EVSI. Ponamus enim, punctum S eſſe ſupra

ver-

verticem A, & punctum P jacere ad alteram partem puncti E, relate ad eundem verticem A. Et quoniam triangulum EGI eſt æquale * parallelogrammo AGEK : addito communi parallelogrammo EGQR; fiet trapetium EIQR æquale parallelogrammo AQRK, ſive etiam * triangulo PQS. Quare, dempto communi trapetio VSQR, erit parallelogrammo EVSI æquale triangulum PVR. *art.242. *art.24[illegible]

246. Quanquam vero fieri poſſit, ut tam punctum S cadat infra verticem A, quam punctum P abeat ad partem oppoſitam; methodo tamen non diſſimili veritatem ejus, de quo agitur, ſemper licebit oſtendere. Unde, ſi recta PS, ducta ex puncto P, utcumque ſumpto in parabola, eidem occurrat in alio puncto *p*, & demiſſa ex puncto iſto ad diametrum AB ordinata *pq*, conveniat hæc cum EF in *r*; fiet eidem parallelogrammo EVSI æquale quoque triangulum *p*V*r*.

247. Cæterum theorema, nuper * oſtenſum, colligi etiam poteſt ex eo, quod ſuperius * demonſtravimus, tum in ellipſi, cum in hyperbola. Jam enim in utraque harum curvarum vidimus, quod, ſi recta EF, per centrum ducta, biſecet in O ſubtenſam AM, & demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela agatur OL; erit ſemper, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Itaque, ſumendo differentias inter antecedentem, & conſequentem cujuſque rationis; erit etiam, ut CL ad GL, ita CG ad AG. *art.240. *art.124. 174. FIG.8.14

248. Abeunte autem in infinitum puncto B, altero diametri vertice, tam ellipſis, quam hy-

*art. 84. hyperbola vertitur * in parabolam. Et quia una cum illo abit etiam in infinitum centrum C, quod biſecat diametrum AB; rectæ duæ AC, EC evadent inter ſe mutuo parallelæ. Quumque duæ CL, CG fiant infinitæ, & differentes a ſe mutuo per longitudinem finitam GL; eædem haberi poterunt, velut æquales inter ſe: & propterea, quum ſit, ut CL ad GL, ita CG ad AG, etiam AG ipſi GL æqualis erit.

249. Quin & conſectaria ejuſdem theorematis adamuſſim correſpondent iis, quæ in ellipſi, & hyperbola ex eodem theoremate deduximus. Nam, ubi centrum C in infinitum abire ſupponitur, quemadmodum parallelæ fiunt duæ AC, EC, ſic omnia illa trapetia in parallelogramma totidem vertuntur. Atque hinc etiam vera ratio eluceſcit, cur in parabola diametri omnes inter ſe ſint parallelæ: nimirum, quia in ea centrum, ad quod convergere deberent, eſt in infinita diſtantia a vertice diametri principalis.

III. *Determinatio aliarum diametrorum, & earum affinitas cum diametro principali.*

250. Ex iis, quæ mox oſtenſa ſunt, facile quidem erit, inferre, quod ſit diameter parabolæ recta quælibet, ducta æquidiſtanter diametro principali; quodque aliæ iſtæ diametri eaſdem habeant proprietates, quibus ipſa diameter principalis eſt referta. Jam enim, ut recta aliqua, æquidiſtanter ducta diametro principali, poſſit eſſe diameter parabolæ, neceſſe eſt, ut biſeces rectas omnes, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad curvam termina-

natas. Id vero facili quidem negotio oſtendemus. Æquidiſtanter enim diametro principali AB ducatur recta quævis EF, quæ biſecet in O FIG. 26.
ſubtenſam AM. Dico, eam ſecare quoque bifariam quamvis aliam rectam Pp, quæ ipſi AM parallela, utrinque ad curvam terminatur.

251. Conveniat namque recta iſta Pp producta, ſi opus eſt, cum diametro principali AB in puncto S; & demiſſis ad eandem diametrum ordinatis PQ, pq, occurrentibus ipſi EF in punctis R, & r, ducantur rectæ EI, AK, ipſis AM, PQ parallelæ, quæ cum aliis duabus AB, EF conveniant in I, & K. Eidem igitur parallelogrammo EVSI æquale erit * utrumque triangulorum PVR, pVr. Quare æqualia erunt inter ſe duo iſta triangula PVR, pVr. Sed eadem triangula, velut ſimilia, ſunt, ut quadrata laterum homologorum PV, pV. Itaque latera iſthæc homologa PV, pV pariter æqualia erunt; & conſequenter tota Pp bifariam ſecta erit in V. *Art. 245. 246.

252. Deinde habebunt omnes aliæ diametri eaſdem proprietates cum diametro principali; ſi utique, etiam relate ad eas, quadrata ordinatarum, hoc eſt ſemiſſium earum rectarum, quæ bifariam ab ipſis dividuntur, fuerint, ut abſciſſæ, quæ ordinatis iis correſpondent. Id vero facillime etiam oſtendemus. Maneant enim omnia, ut ſupra *. Dico, quadrata ordinatarum AO, PV eſſe inter ſe, quemadmodum ſunt abſciſſæ correſpondentes EO, EV. *Art. 250.

253. Nam, quum triangulum AOK oſtenſum ſit * æquale parallelogrammo EOAI, & triangulum PVR æquale * parallelogrammo *Art. 243. *Art. 245.

EVSI,

EVSI; erit, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita parallelogrammum EOAI ad parallelogrammum EVSI. Sed ratio triangulorum eſt æqualis ei, quam habet AO quadratum ad PV quadratum; itemque ratio parallelogrammorum adæquat illam, quam habet EO ad EV. Itaque erit, ex æquali, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita EO ad EV.

254. Unde modo, ſi per verticem E ducatur recta EH, ordinatis parallela, quæ ſit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO ſit æquale rectangulo HEO; erit pariter * quadratum cujuſvis alterius ordinatæ PV æquale correſpondenti rectangulo HEV. Et, quemadmodum rectam iſtam EH appellare licebit parametrum diametri EF; ita, quum æquales ſint duæ AG, EO, facile erit oſtendere, quod, ſi diameter principalis AB rectos cum ſuis ordinatis angulos conſtituat, parameter EH ſuperet parametrum AD quadruplo ipſius AG.

FIG. 27. *Art. 106.

255. Hinc ulterius, deſcribere licebit parabolam, datis longitudine, & poſitione, non modo diametro principali AB, & ipſius parametro AD, verum etiam alia quavis diametro EF, & parametro ejus EH. Unde etiam *, ſicuti recta EH, ducta per verticem E ipſius diametri EF, ordinatis ſuis æquidiſtanter, contingere debet parabolam in ſolo puncto E; ita omnis alia recta, quæ, ducta ex eodem vertice E, angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in alio puncto parabolæ occurret. Ex quo fiet, ut, ſicuti ex diametro principali tranſire licuit ad alias diametros; ſic ex qualibet alia diametro, tum ad ipſam principalem, cum ad alias omnes poſſit perveniri.

*Art. 238.

256.

256. Nam ſemper ac eædem ſunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamentale, quod paulo ante * oſtenſum eſt, relate ad diametrum principalem, poterit eadem omnino ratione demonſtrari de quavis alia diametro EF. Unde omnes illæ æqualitates triangulorum, parallelogrammorumque, ſuperius oſtenſæ in ordine ad diametrum principalem, obtinebunt quoque reſpectu cujuſvis alterius diametri EF: proindeque, iis adhibitis, oſtendere rurſus licebit, eſſe diametros parabolæ omnes rectas, æquidiſtanter ductas ei, quæ jam tali munere fungitur; nec non alias iſtas diametros eaſdem cum illa proprietates habere. *art. 240.

257. Cæterum, præter eas, quæ ducuntur æquidiſtanter diametro principali AB, nulla alia recta eſſe poteſt diameter parabolæ. Nam, ut recta aliqua eſſe poſſit parabolæ diameter, neceſſe eſt, ut biſecet rectas omnes alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas. Sit ergo TY recta, poſitione data, cui debent eſſe parallelæ eæ omnes, quæ bifariam a diametro dividuntur. Jamque, ſi ea parallela ſit ordinatis diametri principalis AB, erit ipſa AB diameter quæſita. Quod ſi ſecus accidat, ſit ei æquidiſtans ſubtenſa AM, quæ occurret * parabolæ in alio puncto M; & rurſus quæſita diameter erit * recta EF, quæ, ducta æquidiſtanter ipſi AB, biſecat in O ſubtenſam AM. *art. 238. *art. 250.

IV.

IV. *Diametrorum parabolæ aliæ communes affectiones recenſentur.*

158. PRæter recenſitas proprietates, plures alias communes habent parabolæ diametri. Ac primo quidem quælibet earum non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, biſariam dividit, quam quæ ordinatim
FIG. 27. ad ipſam diametrum applicantur. Si enim fieri poteſt, diameter parabolæ AB biſecet in S rectam Pp, quæ, utrinque ad curvam terminata, non ſit ipſi AB ordinatim applicata. Quia ergo, ducta ſubtenſa AM, ipſi Pp parallela, & biſecta
*art.250. ea in O, debet * recta EF, ducta per punctum O æquidiſtanter diametro AB, ſecare Pp biſariam in V; biſecta erit eadem Pp, tam in S, quam in V: quod fieri non poteſt.

259. Hinc autem ſequitur viciſſim, quod, ſi aliqua parabolæ diameter biſecet rectam aliquam, utrinque ad curvam terminatam; hæc eſſe debet diametri illius ordinata. Unde ulterius eruitur, quod, ſi recta aliqua biſecet alias duas æquidiſtantes, & utrinque ad parabolam terminatas; ea eſſe debet diameter ipſius parabolæ, atque adeo cuicumque alteri diametro parallela. Nam aliter, ducta per punctum biſectionis unius ex rectis æquidiſtantibus recta alia, cuivis diametro parabolæ parallela; hæc, velut diameter, biſecabit quoque rectam aliam æquidiſtantem: quod fieri non poteſt.

260. Id vero quum ita ſit, facile erit, cujuſvis datæ parabolæ diametrum aliquam reperire, & conſequenter poſitionem determinare omnium

mnium aliarum diametrorum. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam parabolam rectas duas æquidiſtantes, & utrinque ad curvam terminatas. Nam, ſicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit parabolæ; ita & eadem poſitionem omnium aliarum diametrorum exhibebit. Speciatim autem in omni parabola reperire licebit diametrum, quæ cum ſuis ordinatis rectos angulos conſtituat.

261. Comperta enim quacumque parabolæ diametro EF, quæ oblique inſiſtat ſuis ordinatis; erigatur ſuper ea ex vertice ejus E perpendicularis EP. Quumque iſta non ſit parallela ordinatis ipſius EF, eadem neceſſario * ſecabit parabolam in puncto alio P. Secetur ergo PE bifariam in G, & ducta per punctum iſtud recta AB, ipſi EF parallela; erit AB diameter quæſita. Nam, ob parallelas AB, EF, erit angulus BGP æqualis angulo FEP. Quare, ſicuti ex conſtructione rectus eſt angulus FEP, ita & angulus BGP pariter rectus erit. FIG. 27. *art. 255.

262. Diameter iſta AB vocatur axis ipſius parabolæ, ſuper qua ſi perpendicularis erigatur ex puncto A, hæc, velut ordinatis ejus parallela, tota cadet extra parabolam. Unde prono alveo fluit, præter illam, nullam aliam dari diametrum, quæ cum ordinatis ſuis rectos angulos conſtituat. Quod ſi autem diameter quæratur, quæ cum ſuis ordinatis efficiat ad partem unam datum quemvis angulum acutum; ſatis erit, ducere ex vertice A rectam, quæ cum axe AB datum illum angulum contineat. Quum enim recta iſta parabolæ occurrat in puncto alio; fiet eadem recta ordinata diametri, quæ quæſito ſatisfaciet.

263.

263. Si quæſtio ſit de determinanda poſitione ordinatarum alicujus diametri datæ, in ſubſidium poterit advocari ſequens theorema:
FIG. 26. quod, ſi ex verticibus A, & E duarum quarumvis diametrorum AB, EF ordinatæ ad ipſas demittantur AO, EG, portiones EO, AG, abſciſſæ ex iiſdem diametris per ordinatas iſtas, æquales eſſe debent inter ſe. Nam, ducta OL, ipſi
*Art. 240. EG parallela, fiet * AG æquales ipſi GL. Jam vero, ob parallelogrammum EL, duæ GL, EO æquales ſunt inter ſe. Quare etiam AG ipſi EO æqualis erit.

264. Qua autem ratione, ope hujus theorematis, determinari poſſit poſitio ordinatarum cujuſvis diametri datæ; haud difficile erit intelligere. Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur ex vertice ejus A recta AM, quæ parabolam ſecet in M. Tum, ſecta ea bifariam in O, agatur per punctum iſtud recta EF, ipſi AB parallela, quæ eidem parabolæ occurrat in E. Abſcindatur poſtea ex AB portio AG æqualis ipſi EO. Et, juncta recta EG, erit recta iſta EG ordinata una ipſius AB.

265. Non eſt hic reticendum, quod præcedens theorema erui quoque poteſt ex illo, quod ad idem peragendum oſtenſum eſt ſuperius *,
*Art. 146. tam in ellipſi, quam in hyperbola. In utraque
194. enim harum curvarum, ſi AB, EF ſint binæ dia-
FIG. 8. 14 metri, ad quas ex alternis verticibus ordinatæ demittantur EG, AO; erit, ut CG ad AG, ita CO ad EO. Unde, quum ſiat etiam, ut CA ad AG, ita CE ad EO: duplicatis antecedentibus, erit, ut AB ad AG, ita EF ad EO; & permutando, ut AB ad EF, ita AG ad EO. Sed, ubi

el-

ellipſis, & hyperbola vertuntur in parabolam, ratio diametrorum AB, EF evadit æqualitatis. Quare omnino neceſſe eſt, ut in parabola duæ AG, EO inter ſe ſint æquales.

266. Cæterum ex eo, quod centrum in parabola ſit in infinita diſtantia a vertice cujuſcumque diametri, liquet, in hac curva non poſſe locum habere conjugatarum diametrorum contemplationem. Deſtituta eſt ergo parabola, tum centro, cum diametris conjugatis. Et, ob eandem rationem, tametſi parabola, non ſecus ac hyperbola, in infinitum extendatur, non eſt tamen aſymptotis prædita, quemadmodum hyperbola. Nam, converſione ipſius hyperbolæ in parabolam, ſicuti centrum a vertice diametri infinite recedit, ita & ipſæ aſymptoti abibunt in infinitum, nec ullibi comperientur.

V. *Tangentium, & ſecantium parabolæ accidentia principaliora.*

267. Circa tangentes parabolæ jam vidimus *, rectam, quæ ex vertice alicujus diametri ducitur æquidiſtanter ſuis ordinatis, contingere parabolam in ſolo illo vertice; nec aliam rectam cadere in locum, parabola, & tangente contentum. Inde autem duo conſequuntur. Primum eſt, quod ad unum, idemque punctum parabolæ unica tantum tangens duci poteſt. Alterum, quod recta, contingens parabolam in puncto aliquo, debet eſſe parallela ordinatis ejus diametri, quæ pertinet ad punctum contactus.

* *art.* 238. 255.

268. Contingat nunc parabolam recta EI in FIG. 26.

puncto E, vertice diametri EF. Jamque, ſi ea conveniat cum altera quavis diametro AB in puncto I, ad quam etiam ex puncto contactus E ordinata demittatur EG; erunt duæ AG, AI æquales inter ſe. Ducatur enim ad diametrum
b art. 267. EF ordinata AO. Et quoniam huic parallela eſt tangens EI, erit EO ipſi AI æqualis. Oſtenſum
a ar. 263. eſt autem a, eandem EO æqualem eſſe quoque ipſi AG. Itaque duæ AG, AI æquales erunt inter ſe.

269. Ex hoc theoremate, facile quidem erit, omnes alias proprietates derivare, quæ parabolæ tangentibus competunt. Sed ejus converſum nullo etiam negotio licebit oſtendere: nimirum, quod, ſi duæ AG, AI inter ſe ſint æquales, recta EI contingere debet parabolam in ſolo pun-
a ar. 263. cto E. Nam, iiſdem poſitis, erunt rurſus a æquales duæ AG, EO. Unde ſemper ac AG ponitur æqualis ipſi AI; erunt etiam æquales duæ AI, EO; proindeque, quum duæ AO, EI pa-
b art. 267. rallelæ fiant inter ſe; plane neceſſe eſt b, ut recta EI contingat parabolam in E.

270. Quantum ad ſecantes parabolæ; hoc in iis obtinet theorema, quod, ſi duæ quævis rectæ, utrinque ad parabolam terminatæ, ſibi mutuo occurrant, rectangula ſub ipſarum ſegmentis ſint, ut parametri diametrorum, ad quas eædem rectæ velut ordinatæ referuntur. Ad id vero oſtendendum, opus eſt hoc lemmate; quod,
FIG. 28. ſi MO ſit ordinata diametri AB, & cum ea conveniat in R diameter altera EF; rectangulum ſub ſegmentis ejus MRO æquale ſit rectangulo, quod ſit ex AD, parametro ipſius AB, in interceptam alterius diametri portionem ER.

271.

271. Oſtendetur id autem in hunc modum Super AB demittatur ordinata altera EG. Et quoniam MO ſecta eſt bifariam in N, eſtque EG æqualis ipſi NR; erit differentia quadratorum MN, EG æqualis rectangulo MRO. Quum vero, propter parabolam *, MN quadratum ſit æquale rectangulo DAN, & EG quadratum æquale rectangulo DAG; erit differentia eorundem quadratorum MN, EG æqualis quoque rectangulo ex AD in GN, ſive ER: & propterea rectangulum MRO æquale erit rectangulo ex AD in ER. *Art. 106. 254.

272. Hoc lemmate præmiſſo, ſint nunc MO, PQ rectæ duæ, quæ, utrinque ad parabolam terminatæ, ſibi mutuo occurrant in R; ſintque etiam AB, TV binæ diametri, ad quas eædem rectæ velut ordinatæ referuntur. Jamque, ſi earum diametrorum parametri fuerint AD, TX, oſtendendum erit, rectangulum MRO eſſe ad rectangulum PRQ, veluti eſt AD ad TX. Hunc in finem ducatur per punctum occurſus R diameter tertia EF.

273. Vi itaque oſtenſi lemmatis erit, tam rectangulum MRO æquale rectangulo ex AD in ER, quam rectangulum PRQ æquale rectangulo ex TX in ER. Quare erit, ut rectangulum MRO ad rectangulum PRQ, ita rectangulum ex AD in ER ad rectangulum ex TX in ER. Sed rectangulum ex AD in ER eſt ad rectangulum ex TX in ER, ut AD ad TX. Et igitur, ex æquali, etiam rectangulum MRO erit ad rectangulum PRQ, ut eſt AD ad TX.

274. Fieri autem poteſt, ut una ex ſecantibus tangens evadat: nimirum, quum puncta duo

ſectionis coeunt in unum, Id vero quum contingit, rectangulum ſub ejus ſegmentis vertetur in quadratum ipſius tangentis. Unde inter quadratum iſtud, & rectangulum, contentum ſub ſegmentis alterius, eadem adhuc ratio obtinebit. Sed nihil obſtat, quin utraque ſecans vertatur in tangentem: quo caſu ambo quidem rectangula abibunt in quadrata ipſarum tangentium; & inter quadrata iſta eadem ſemper ratio locum habebit.

275. Si ergo ex puncto, ſumpto extra parabolam, ducantur ad eam tangentes duæ; erunt quadrata iſtarum tangentium inter ſe, ut ſunt parametri diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus. Et, ſi ex eodem puncto ducantur rectæ duæ, quarum una tangat parabolam, altera eandem ſecet; erit quadratum tangentis ad rectangulum ſub ſecante tota, & portione extra parabolam exiſtente, ut eſt parameter diametri, quæ pertinet ad punctum contactus, ad parametrum diametri illius, ad quam ea ſecans velut ordinata refertur.

276. Cæterum ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, prono alveo fluunt ſequentia duo theoremata. Primum eſt, quod, ſi duabus parabolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tum tangentes, cum ſecantes; rectangula ſub ſecantium ſegmentis proportionalia eſſe debent quadratis, quæ ex tangentibus fiunt. Alterum eſt, quod, ſi duabus ſecantibus parabolæ parallelæ fuerint binæ aliæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tam illæ, quam iſtæ; rectangula ſub ſegmentis illarum proportionalia ſint oportet rectangulis, quæ ſub iſta-

rum

rum ſegmentis continentur.

277. Illud etiam nolo hic reticere, quod theorema de ſecantibus parabolæ erui quoque poteſt ex illo, quod ſuperius * oſtenſum eſt circa ſecantes, tum ellipſis, cum hyperbolæ. In utraque enim harum curvarum, ſi duæ rectæ, utrinque ad curvam terminatæ, ſibi mutuo occurrant; fiunt rectangula ſub ipſarum ſegmentis, ut quadrata ex conjugatis diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur; adeoque eorum ratio componetur ex ratione ipſarum diametrorum, & ratione ſuarum parametrorum. Jam vero, quum ellipſis, & hyperbola vertuntur in parabolam, ratio diametrorum evadit æqualitatis. Quare omnino neceſſe eſt, ut in parabola rectangula ſub ſegmentis ſecantium ſint, ut ſolæ parametri diametrorum, quibus eæ ſecantes velut ordinatæ correſpondent.

* art. 153, 201.

278. Non eſt pariter hoc loco reticendum, quod ex lemmate, theoriæ ſecantium præmiſſo, elegans parabolæ proprietas fluit: nempe, quod, relate ad quamlibet diametrum, ut eſt parameter ad ſummam duarum ordinatarum, ita eſt differentia earundem ordinatarum ad differentiam abſciſſarum, quæ ordinatis illis correſpondent. Nam, quum, ob lemma illud, rectangulum MRO ſit æquale rectangulo ex AD in ER, ſive GN; erit, ut parameter AD ad OR ſummam duarum ordinatarum MN, EG, ita MR differentia earundem ordinatarum ad GN differentiam abſciſſarum AN, AG, quæ ordinatis illis correſpondent.

FIG. 28.

SECTIO II.

De Compoſitione Locorum Primi, & Secundi Generis.

279. EXpoſita natura linearum, quibus loca, tum primi, cum ſecundi generis terminantur; ſequitur modo, ut ipſam horum locorum compoſitionem aggrediamur. Diximus autem, loca primi generis terminari ſemper lineis rectis; loca vero, quæ ſecundi ſunt generis, poſſe pro ſuis terminis habere, vel parabolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam, quæ eſt ſpecies quædam ellipſis, vel denique hyperbolam, ſive relate ad diametrorum aliquam, ſive relate ad ſuas aſymptotos conſideratam.

280. Id ergo quum ita ſit, theoriam iſtam de compoſitione locorum primi, & ſecundi generis ad quinque capita revocabimus. Primo enim componenda nobis erunt loca ad lineam rectam. Secundo compoſitionem oſtendemus locorum ad parabolam. Tertio agemus de compoſitione locorum ad ellipſim, & conſequenter ad circuli circumferentiam. Quarto compoſitionem explicabimus locorum ad hyperbolam, relate ad diametrorum aliquam conſideratam. Et quinto demum agendum nobis erit de compoſitione locorum ad eandem hyperbolam, ubi ad ſuas aſymptotos refertur.

281. Etſi autem aſſertum a nobis ſit, loca qui-

quidem primi generis terminari tantum a rectis, ea vero, quæ ſecundi ſunt generis, habere velut ſuos terminos ſolas coni ſectiones, & circuli circumferentiam; id tamen nulla fuit ratione comprobatum. Patebit interim veritas ejus, ipſa horum locorum compoſitione. Ea etenim mediante abunde conſtabit, æquationem duarum incognitarum explicari ſemper loco ad lineam rectam, ubi eſt unius tantum dimenſionis; explicari vero loco, ſive ad parabolam, ſive ad ellipſim, ſive ad circuli circumferentiam, ſive demum ad hyperbolam, ubi ad duas dimenſiones attollitur.

CAPUT I.

Compoſitio locorum ad rectam.

282. SI verum eſt, quod loca primi generis rectis dumtaxat terminentur: plane neceſſe eſt, ut æquatio duarum incognitarum, quæ eſt unius tantum dimenſionis, loco ad rectam poſſit ſemper explicari. Unde, ut revera pateat, rectas ſolas eſſe terminos locorum primi generis; oſtendendum nobis erit, quod omnis æquatio, quæ, duas comprehendens incognitas, eſt unius dumtaxat dimenſionis, non ad alium locum nos manuducit, quam, qui a recta linea terminatur. Id vero eo lubentius præſtabimus; quia, oſtenſa veritate iſta, ipſa horum locorum compoſitio nullam deinde difficultatem habebit.

I. *Demonſtratio, quod loca primi generis rectis ſolis terminentur.*

283. ÆQuatio, quæ duas incognitas comprehendens, ad unicam tantum dimenſionem aſcendit, poteſt eſſe quadruplicis formæ, vel nempe $x = my : n$, vel $x + p = my : n$, vel $x - p = my : n$, vel denique $p - x = my : n$. Quare, conſtabit nobis, omnem æquationem duarum incognitarum, quæ eſt unius dumtaxat dimenſionis, non ad alium locum nos manuducere, quam, qui a recta ſola terminatur; ſi utique oſtendi poſſit, unamquamque earum æquationum poſſe per rectam ſolam explicari.

284. Eſto igitur AB linea abſciſſarum, & FIG. 29. AC linea ordinatarum. Jamque, ſi fuerit primo $x = my : n$, capiatur ſuper AB portio AE $= m$, & per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, ducatur recta EF $= n$. Agatur porro per punctum E recta AX; & hæc erit terminus loci quæſiti. Nam, ſumpta in AB portione quavis AN $= x$, & ducta per punctum N, eidem AC æquidiſtanter, recta NM $= y$; erit, ut AN ad NM, ita AE ad EF; hoc eſt, ut x ad y, ita m ad n: proindeque erit $x = my : n$.

285. Recta autem AX, natura ſua, extenditur etiam ad partem oppoſitam verſus Z. Unde æquationi $x = my : n$ fieri debet ſatis, tum per ipſam AX, cum per aliam AZ. Nec ſane aliter ſe res habet. Nam, ſumpta portione AN ad partem contrariam, & ducta adhuc NM, ipſi AC parallela, fiet AN $= -x$, & NM $= -y$. Unde, quum adhuc ſit, ut AN ad NM, ita AE

ad

ad EF; erit, ut $-x$ ad $-y$, ita m ad n: proinque habebitur æquatio $-my:n=-x$, quæ, per tranſpoſitionem terminorum, rurſus evadet $x=my:n$.

286. Quod, ſi habeatur ſecundo $x+p=my:n$; tunc, producta BA uſque in D, ut ſit AD $=p$, capiatur ſuper DB portio DE $=m$. Nam, ducta quoque per punctum E recta EF $=n$, ipſi AC parallela, ſi agatur per punctum F recta DX; fiet hæc terminus loci quæſiti. Capiatur enim ſuper AB portio quævis AN $=x$, & ducatur per punctum N recta NM $=y$, eidem AC parallela. Fiet ergo DN $=x+p$. Quumque DN ſit ad NM, veluti eſt DE ad EF; erit, ut $x+p$ ad y, ita m ad n: & propterea erit $x+p=my:n$. FIG. 30.

287. Hic quoque notandum eſt, quod, quum recta DX ipſi AC occurrat in G, & pergat quoque ad partem oppoſitam verſus Z; fieri poteſt ſatis æquationi $x+p=my:n$, non modo per ipſam GX, verum etiam, tum per portionem DG, cum per aliam DZ. Nam, ſumpta portione AN ad partem contrariam, fiet AN $=-x$. Unde, ſi ea minor ſit, quam AD; erit DN $=x+p$, & NM $=y$: & propterea, quum adhuc ſit, ut $x+p$ ad y, ita m ad n; rurſus habebitur æquatio $x+p=my:n$. Quod ſi vero AN major fuerit, quam AD; tunc erit DN $=-x-p$, & NM $=-y$. Quare, quum habeatur, ut $-x-p$ ad $-y$, ita m ad n; orietur æquatio $-my:n=-x-p$, quæ, tranſpoſitis terminis, ſemper evadet $x+p=my:n$.

288. Quod ſi fuerit tertio $x-p=my:n$; tunc, abſciſſa ex AB portione AD $=p$, capiatur FIG. 31.

tur

tur ſuper reliqua DB portio DE $= m$: Nam, ducta quoque per punctum E recta EF $= n$, ipſi AC parallela, ſi agatur per punctum F recta DX; fiet hæc terminus loci quæſiti. Capiatur enim ſuper AB portio quævis AN $= x$, quæ major ſit, quam AD; & ducatur per punctum N recta NM $= y$, eidem AC parallela. Fiet ergo DN $= x - p$. Quumque DN ſit ad NM, veluti eſt DE ad EF; erit, ut $x - p$ ad y, ita m ad n: proindeque erit $x - p = my : n$.

289. Recta porto DX, producta ad plagam oppoſitam, primo occurrit ipſi AC in G, tum extenditur verſus Z. Unde nolo hic reticere, quod æquationi $x - p = my : n$ fieri poteſt ſatis, non modo per ipſam DX, verum etiam, tum per portionem DG, cum per aliam GZ. Nam primo, ſumpta ſuper AB portione AN, quæ minor ſit, quam AD, fiet DN $= p - x$, & NM $= - y$. Unde, quum ſit, ut $p - x$ ad $- y$, ita m ad n; erit $- my : n = p - x$; atque adeo $x - p = my : n$. Et deinde, ſumpta portione AN ad partem contrariam, fiet adhuc DN $= p - x$, & NM $= - y$. Quare ſemper habebitur $x - p = my : n$.

290. Denique, ſi habeatur $p - x = my : n$;
FIG. 32. tunc, abſciſſa quoque ex AB portione AD $= p$, capiatur ex D verſus A portio DE $= m$. Nam, ducta adhuc per punctum E recta EF $= n$, ipſi AC parallela, ſi agatur per punctum F recta DX; fiet hæc terminus loci quæſiti. Capiatur enim ſuper AB portio quævis AN $= x$, quæ minor ſit, quam AD; & ducatur per punctum N recta NM $= y$, eidem AC parallela. Fiet ergo DN $= p - x$. Quumque DN ſit ad NM,

veluti eſt DE ad EF; erit, ut $p-x$ ad y, ita m ad n: & propterea erit $p-x=my:n$.

291. Quum autem recta DX ipſi AC occurrat in G, & pergat quoque ad partem oppoſitam verſus Z; non eſt hic reticendum, quod æquationi $p-x=my:n$ fieri poteſt ſatis, non modo per portionem DG, verum etiam, tum per ipſam DZ; cum per aliam GX. Nam primo, ſumpta ſuper AB portione AN, quæ major ſit, quam AD, fiet $DN=x-p$, & $NM=-y$. Unde, quum ſit, ut $x-p$ ad $-y$, ita m ad n; erit $-my:n=x-p$; atque adeo $p-x=my:n$. Et deinde, ſumpta portione AN ad partem contrariam, erit $DN=p-x$, & $NM=y$. Quare, quum ſit, ut $p-x$ ad y, ita m ad n; erit quoque $p-x=my:n$.

II. *Duplex loca primi generis componendi ratio expoſita.*

292. Probavimus, loca primi generis rectis ſolis terminari, quia æquationes talium locorum revocari ſemper poſſunt ad aliquam harum formarum $x=my:n$, $x+p=my:n$, $x-p=my:n$, $p-x=my:n$, quarum unaquæque per rectam ſolam explicatur. Hinc vero, aliud agentes, jam methodum aperuimus, qua loca omnia primi generis conſtrui poſſent. Pro hiſce etenim locis æquatio debet ſemper formam induere unius ex quatuor illis æquationibus. Quare ſatis foret, æquationes illas inter ſe mutuo conferre, & mutua iſta comparatione determinare valorem quantitatum, quibus locus definitur.

293.

293. Ut, ſi in reſolutione alicujus problematis indeterminati inventa fuerit æquatio $cdx = aby$; liquido patet, quod huic æquationi per locum primi generis ſatisfieri debet. Quum autem eadem æquatio, diviſa per cd, fiat $x = aby : cd$; liquet, eam eſſe ejuſdem formæ cum priore æquatione $x = my : n$. Unde, comparatis inter ſe mutuo terminis ipſarum, fiet $m : n = ab : cd$: proindeque, aſſumpta $n = d$, erit $m = ab : c$. Quocirca componetur locus quæſitus, ſi, quemadmodum pro æquatione $x = my : n$ poſuimus AE $= m$, & EF $= n$, ita nunc fiat AE $= ab : c$,
FIG. 29. & EF $= d$.

294. Similiter, ſi æquatio, orta ex reſolutione alicujus problematis indeterminati, fuerit $ax + b^2 = by$; erit etiam primi generis locus, quo huic æquationi ſatisfieri debet. Plane vero, ſi eadem æquatio dividatur per a, habebitur loco ejus hæc alia $x + b^2 : a = by : a$, quæ erit ejuſdem formæ cum ſecunda æquatione $x + p = my : n$. Unde, inſtituta comparatione, fiet $p = b^2 : a$, & $m : n = b : a$: proindeque, aſſumpta $n = a$, erit $m = b$. Quare fiet quæſiti loci compoſitio, ſi capiatur AD $= b^2 : a$, DE
FIG 30. $= b$, & EF $= a$.

295. Eadem ratione, ſi æquatio, nata ex reſolutione alicujus problematis indeterminati, fuerit $a^2x - b^2c = b^2y$; non ad alium locum ea nos manuducet, quam, qui ad primum pertinet genus. Quia vero eadem æquatio evadit $x - b^2c : a^2 = b^2y : a^2$, ſi utraque ejus pars dividatur per a^2; liquet, eam eſſe ejuſdem formæ cum tertia æquatione $x - p = my : n$. Quare, comparatione inſtituta, habebitur $p = b^2c : a^2$, &

$m : n$

$m : n = b^2 : a^2$; adeoque, poſita $n = a$, erit $m = b^2 : a$. Unde componetur locus quæſitus, faciendo AD $= b^2c : a^2$, DE $= b^2 : a$, & EF FIG. 31. $= a$.

296. Atque ita quoque, ſi, inſtituta reſolutione alicujus problematis indeterminati, oriatur æquatio $ab - cx = cy$; non alio loco ei debet fieri ſatis, quam, qui ad primum genus refertur. Et quoniam eadem æquatio, diviſa per c, evadit $ab : c - x = y$; liquet, eam eſſe ejuſdem formæ cum quarta æquatione $p - x = my : n$. Unde, comparando terminos unius cum terminis alterius, habebitur $p = ab : c$, & $m : n = 1 : $ proindeque, aſſumpta $n = 1$, fiet etiam $m = 1$. Quocirca, conſtruetur locus quæſitus, ſi, poſita AD $= ab : c$, capiatur DE cujuſvis longitudinis, & fiat EF æqualis ipſi DE. FIG. 32.

297. Interim nimis moleſtum foret, omnium quatuor formularum conſtructiones memoria retinere, pro componendis locis omnibus primi generis. Quare optandum eſſet, ut unica dumtaxat formula totum negotium peragi poſſet. Plane vero haud arduum erit id, quod quærimus, aſſequi. Et licebit hunc in finem eligere; vel formulam priorem, quæ eſt omnium ſimpliciſſima; vel aliquam trium poſteriorum, ad quas caſus compoſiti reducuntur. Unde duplex loca primi generis componendi ratio nobis ſubnaſcitur, quarum utramque pro compoſitione locorum ſecundi generis deinceps etiam adhibebimus.

298. Prior itaque methodus in ſubſidium advocat formulam, omnium ſimpliciſſimam. Et, quum ea adhibetur, in id maxime incumbendum, ut, ſubſtitutionis ope, ad eam reducatur æquatio lo-

localis, de qua agitur; quandoquidem, reductione iſta peracta, facile erit, quæſitum locum conſtruere. Altera autem methodus per formulam procedit, omnium maxime compoſitam. Et, juxta hanc, præcipuus Analyſtæ labor in eo conſiſtit, ut, comparationis ope, definiat quantitates, quæ locum determinant; nam, iis determinatis, nullo etiam negotio loci compoſitionem aſſequi licebit.

299. Ex duabus his methodis, quæ, ut jam
*art. 297. dictum eſt *, adhiberi poſſunt in compoſitione locorum, tum primi, cum ſecundi generis, nulli dubium eſſe poteſt, quin prima facilior longe in praxi deprehendatur. Interim altera in eo potiſſimum excellit, quod abunde in propatulo ponit, qua ratione ex conſtructionibus generalibus ſpeciales deducantur. Unde nemo vitio nobis verti debet, quod de compoſitione locorum acturi, utramque methodum explicemus. Nam, etſi poſterior non ſit adeo ad praxim expedita, quemadmodum prior; habet tamen ſatis emolumenti, ut ſcitu digna judicetur.

III. *Compoſitio locorum primi generis per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

300. Locorum primi generis formula, omnium ſimpliciſſima, eſt $x = my : n$. Et, ut ſuperius * vidimus, ſi AB ſit li-
FIG. 24.
*art. 289. nea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus ejus formulæ, capiendo ſuper AB portionem AE $= m$, ducendo per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, rectam EF $= n$, & conjugendo demum puncta A, & F per rectam AF;

AF; quum recta iſta AF, utrinque producta, ſit terminus loci quæſiti. Oſtendendum eſt ergo, quomodo per reductionem æquationis ad hanc formulam quemcumque locum primi generis componere liceat.

301. Proponatur itaque primum æquatio $ax = by - ab$. Sane, ſicuti per tranſpoſitionem fit $ax + ab = by$; ita, dividendo per a, erit $x + b = by : a$. Ponatur deinde $x + b = z$; & erit $z = by : a$ æquatio reducta. Sit nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit ergo ipſius AB quælibet portio AN $= x$. Jam vero in reductione habetur $x + b = z$. Quare, ſi extendatur BA uſque in D, donec fiat AD $= b$; erit quælibet portio DN $= x + b = z$; & conſequenter, pro æquatione reducta, manebit quidem eadem linea abſciſſarum, ſed ipſarum origo erit punctum D. FIG. 30.

302. Reſpectu igitur reductæ æquationis $z = by : a$ habenda eſt DB velut linea abſciſſarum, & AC ut linea ordinatarum. Unde, ad componendum locum, quo ei fit ſatis, ſumere oportebit ſuper DB portionem DE $= b$, tumque ducere per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, rectam EF $= a$: qua ratione fiet recta DF, utrinque producta, terminus loci quæſiti. Eo autem fit ſatis etiam æquationi propoſitæ $ax = by - ab$. Nam, ducta NM, eidem AC parallela; erit, ut DN ad NM, ita DE ad EF: proindeque, ſi quamadmodum habetur DN $= x + b$, ita ponatur NM $= y$; erit, ut $x + b$ ad y, ita b ad a; & conſequenter erit $ax + ab = by$, ſive etiam $ax = by - ab$.

303. Proponatur ſecundo æquatio $a^2x =$

b^2y.

$b^2y + a^2b$. Hæc, ſicuti tranſpoſitione fit $a^2x - a^2b = b^2y$; ita, diviſa per a^2, evadit $x - b = b^2y : a^2$. Ponatur deinde $x - b = z$; & erit $z = b^2y : a^2$ æquatio reducta. Sit jam, pro æ-
FIG. 31. quatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit ergo ipſius AB quælibet portio AN $= x$. Eſt autem in reductione $x - b = z$. Itaque, ſi abſcindatur ex qualibet AN portio AD $= b$, fiet reliqua DN $= x - b = z$: proindeque pro æquatione reducta manebit quidem eadem linea abſciſſarum, ſed earum origo erit punctum D.

304. Hinc, reſpectu reductæ æquationis $z = b^2y : a^2$, erit DB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Quare, ut componatur locus, quo ei fit ſatis, capienda erit ſuper DB portio DE $= b^2 : a$, tumque ducenda per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, recta EF $= a$; atque hac ratione fiet recta DF, utrinque producta, terminus loci quæſiti. Interim loco iſto fit ſatis etiam æquationi propoſitæ $a^2x = b^2y + a^2b$. Nam, ducta NM, eidem AC parallela; erit, ut DN ad NM, ita DE ad EF. Unde, ſi ſicuti habetur DN $= x - b$, ita ponatur NM $= y$; erit, ut $x - b$ ad y, ita $b^2 : a$ ad a: proindeque erit $ax - ab = b^2y : a$, hoc eſt $a^2x - a^2b = b^2y$, ſive etiam $a^2x = b^2y + a^2b$.

305. Proponatur demum æquatio $ab - ay = cx$. Iſta, ſicuti tranſpoſitione fit $ab - cx = ay$; ita, dividendo per c, evadit $ab : c - x = ay : c$. Ponatur deinde $ab : c - x = z$; & erit $z = ay : c$ æquatio reducta. Eſto nunc, pro æ-
FIG. 32. quatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit igitur ipſius AB

por-

portio quælibet AN $= x$. Eſt autem in reductione $ab : c - x = z$. Itaque, ſi abſcindatur ex AB portio AD $= ab : c$, & capiatur quælibet AN, minor, quam AD; fiet reliqua DN $= ab : c - x = z$: proindeque, pro æquatione reducta, ſicuti origo abſciſſarum erit punctum D, ita eædem tendent ex D verſus A.

306. Quæ quum ita ſint, reſpectu reductæ æquationis $z = ay : c$, erit DA linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Unde, ad componendum locum, quo ei fit ſatis, capienda erit ſuper DA portio DE $= a$, tumque ducenda per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, recta EF $= c$: qua ratione fiet recta DF, utrinque producta, terminus loci quæſiti. Sed loco iſto fit ſatis etiam æquationi propoſitæ $ab - ay = cx$. Nam, ducta NM, eidem AC parallela; erit, ut DN ad NM, ita DE ad EF. Quare, ſi, quemadmodum habetur DN $= ab : c - x$, ita ponatur NM $= y$, erit; ut $ab : c - x$ ad y, ita a ad c: & propterea erit $ab - cx = ay$, ſive etiam $ab - ay = cx$.

IV. *Compoſitio locorum primi generis per formulam, omnium maxime compoſitam.*

307. QUemadmodum ex quatuor illis formulis, ad quas ſuperius * reduximus locales æquationes primi generis, prior eſt omnium ſimpliciſſima, ita quælibet trium poſteriorum eſt omnium maxime compoſita. Id vero mirum cenſeri non debet. Omnes enim eundem terminorum numerum continent, tantumque diverſitate ſignorum, quibus termini illi af- *art. 283.

ficiuntur, a ſe mutuo differunt. Eligemus interim, pro compoſitione locorum primi generis, formulam $x + p = my : n$, cui qua ratione fiat
*art.286. ſatis, jam ſupra * fuit expoſitum.

308. Nimirum, exiſtentibus AB linea ab-
FIG. 30. ſciſſarum, & AC linea ordinatarum, producenda eſt primo BA verſus D, uſque donec fuerit $AD = p$; tum, abſciſſa ex DB portione $DE = m$, ducenda eſt per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, recta $EF = n$. Et recta DF, utrinque producta, ea erit, per quam quæſitus locus terminabitur. Nunc ergo oſtendendum nobis eſt, qua ratione, ope hujus formulæ, omnia loca primi generis componantur.

309. Fiet igitur compoſitio cujuſvis alterius loci primi generis, comparando ejus æquationem cum formula illa. Hac enim comparatione definientur quantitates, quæ locum determinant. Unde, ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ; obtinebitur loci compoſitio, dando rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in conſtructione formulæ reperiuntur habere. Sed, ſi earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt in loci compoſitione ad plagam oppoſitam.

310. Proponatur primum æquatio $x + ab : c = y$. Sane, comparatis terminis ejus cum terminis formulæ generalis $x + p = my : n$, fiet $p = ab : c$, & $m : n = 1$: adeo nempe, ut, poſita $n = 1$, erit etiam $m = 1$. Unde, quum omnes quantitates, locum determinantes, ortæ ſint poſitivæ, habebitur quæſiti loci compoſitio, ſi rectarum, quas referunt, ſervata eadem poſitione, quam in conſtructione formulæ reperiuntur

tur habere, ponatur $AD = ab : c$; & ſumpta DE cujuſvis longitudinis, conſtituatur EF ipſi DE æqualis. FIG. 30.

311. Proponatur ſecundo æquatio $x - a^2 : c = a^2y : c^2$. Hæc, per comparationem cum formula generali $x + p = my : n$, exhibet $p = - a^2 : c$, & $m : n = a^2 : c^2$; adeo nempe, ut, aſſumpta $n = c$, fiet $m = a^2 : c$. Quum ergo valor ipſius p ortus ſit negativus; non modo fieri debet in loci compoſitione $AD = a^2 : c$, verum FIG. 31. etiam capienda eſt eadem AD ad plagam oppoſitam ex A verſus B. Quumque valores ipſarum m, & n prodierint poſitivi, poſitio rectarum DE, EF haud quidem mutanda eſt, ſed tantum poni debet $DE = a^2 : c$, atque adeo æqualis ipſi AD, & $EF = c$.

312. Proponatur tertio æquatio $x + ay : c = ab : c$, ſive $x - ab : c = - ay : c$. Per comparationem ejus cum formula generali $x + p = my : n$, habetur $p = - ab : c$, & $m : n = - a : c$: adeo, nempe, ut poſita $n = c$, fiet $m = - a$. Hinc, quia valores ipſarum p, & m orti ſunt negativi; in compoſitione loci, non modo fieri debet AD FIG. 32. $= ab : c$, & $DE = a$; verum etiam eædem AD, DE ſumendæ ſunt ad partes oppoſitas; hoc eſt AD ex A verſus B, & DE ex D verſus A. Quia vero valor ipſius n prodiit poſitivus; poſitio rectæ EF haud quidem mutanda eſt, ſed tantum fieri debet $EF = c$.

313. Proponatur demum æquatio $x = a^2y : c^2$. Plane, comparata æquatione iſta cum formula generali $x + p = my : n$, fit $p = 0$, & $m : n = a^2 : c^2$: proindeque, aſſumpta $n = c$, erit $m = a^2 : c$. Quia ergo valor ipſius p ortus eſt

nullus; etiam in loci compoſitione nulla fieri
FIG. 29. debet longitudo ipſius AD. Itaque punctum D accedet ad punctum A. Quumque valores ipſarum *m*, & *n* comperti ſint poſitivi; manebit quidem eadem poſitio rectarum DE, EF, ſed ponenda erit DE, ſive AE $= a^2 : c$, & EF $= c$.

314. Cæterum in hac loca primi generis componendi ratione duo quidem occurrunt, notatu digna. Primum eſt, quod æquatio loci, de qua agitur, ſubinde ſemper reduci debet, ut incognita *x* maneat ſolitaria, & affecta ſigno poſitivo, omnino ut in ipſa formula $x + p = my : n$ reperitur. Unde, ſi loci æquatio fuerit $bc = ay - cx$; primo quidem per tranſpoſitionem reducenda eſt ad hanc aliam $cx + bc = ay$; deinde vero utraque hujus pars dividi debet per c, quo ſcilicet fiat $x + b = ay : c$.

315. Alterum eſt, quod, comparata æquatione propoſita cum formula generali $x + p = my : n$, dumtaxat quantitatis p valor innoteſcit; & quantum ad alias duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Itaque valor unius ex iis, ut jam in allatis exemplis factum eſt, ſumi poteſt ad libitum; & tunc per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque ſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

V. *Obſervatio quædam ſpecialis circa loca primi generis.*

316. PRiuſquam huic capiti finem imponamus, non abs re erit, circa loca pri-

primi generis ſpecialem quandam obſervationem hoc loco inſtituere. Nimirum jam diximus ſupra *, loca geometrica, de quibus hic potiſſimum agimus, ex ſolutione eorum problematum ſuum ortum habere, quæ indeterminata ſunt, defectu unius conditionis; nec proinde alias æquationes poſſe illiuſmodi locis explicari, quam, quæ duas incognitas comprehendunt. *Art. 13.

317. Interim, quum quæſtio eſt de locis primi generis, etiam æquatio, quæ unicam continet incognitam, aliquo eorum locorum poterit explicari: modo tamen æquatio ſit primi gradus, & ipſa incognita ſit unius dumtaxat dimenſionis. Nec difficile id erit oſtendere, ſi pro loci compoſitione eam methodum adhibeamus, quæ formula utitur, omnium maxime compoſita, $x + p = my : n$.

318. Eſto etenim æquatio $x - a = 0$. Sane, comparatione inſtituta, fit $p = - a$, & $m : n = 0$: proindeque, aſſumpta $n = 1$, erit $m = 0$. Hinc primo, in loci compoſitione, non modo fieri debet AD $= a$; verum etiam, ob valorem negativum ipſius p, capienda eſt AD ex A verſus B. Et deinde, quum ſit $m = 0$, etiam DE nullius longitudinis eſſe debet. Quocirca punctum E accedet ad punctum D, & ex ipſo puncto D ducenda erit recta EF, quæ locum determinat. FIG. 38.

319. Quum autem ſit $n = 1$; recta iſta EF, ſive DF cujuſcumque longitudinis eſſe poterit. Neque vero, pro varia ejus longitudine, putandum eſt, locum variari. Nam, quum recta, locum terminans, tranſire debeat pr puncta duo D, & F; eadem coincidet cum ipſa DF: proin-

deque, quæcumque fuerit longitudo ipſius EF ſive DF, eadem ſemper erit poſitio rectæ, locum terminantis; idemque adeo locus, quo propoſitæ æquationi $x - a = 0$ debet fieri ſatis.

320. Exiſtentibus igitur AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus, ad quem nos ducit æquatio $x - a = 0$, ſi, abſciſſa ex AB portione $AD = a$, ducatur per punctum D recta XZ, ipſi AC parallela. Nam, quum rectæ, quæ ex ſingulis ipſius XZ punctis M demittuntur ſuper AB, æquidiſtanter alteri AC, cadant ad unum, idemque punctum D; fiet AD abſciſſa communis omnium illarum ordinatarum. Unde, etſi in loco ordinata y variationi ſit obnoxia; abſciſſa tamen x erit conſtans, & perpetuo æqualis datæ quantitati a.

321. Eſto etiam æquatio $y - a = 0$. Quoniam in iſta deeſt incognita x; efficiendum eſt, ut etiam in formula $x + p = my : n$ evaneſcere poſſit terminus, in quo x continetur. Quumque in eadem æquatione incognita altera y reperiatur ſolitaria; in id pariter incumbendum, ut in formula quoque incognita y ſola deprehendatur. Quare, multiplicatis formulæ terminis omnibus per n, iiſdemque diviſis per m; inſtituenda eſt comparatio cum æquatione iſta $nx : m + np : m = y$, ſive $y - np : m - nx : m = 0$.

322. Plane vero, comparatione inſtituta, habebitur $np : m = a$, & $n : m = 0$. Hinc, aſſumpta $m = 1$, fiet $n = 0$. Quumque ex priore æquatione $np : m = a$ eruatur $p = am : n$; erit valor ipſius p infinitus. Hinc in loci compoſitione poſitio ipſius AD minime mutari debet; ſed

FIG. 34.

tan-

tantum abibit in infinitum punctum D. Quare recta, locum terminans, parallela fiet lineæ abſciſſarum AB; nec aliud ſupereſt, quam, ut punctum aliquod determinemus, per quod ea tranſſire debet.

323. Hunc in finem præſtat, hoc loco notare, quod, ſicuti in formula generali $y - np : m - nx : m = 0$ recta DF, locum terminans, ipſi FIG. 30.
AC occurrit in G; ita, quum ſit, ut DE ad DF, ita DA ad AG, eſſe debet $AG = np : m$. Quum ergo, per comparationem formulæ generalis cum æquatione propoſita, fiat $np : m = a$; neceſſe eſt, ut pro ipſa æquatione, de qua agitur, ſit $AG = a$: & propterea recta, locum terminans, ſicuti duci debet æquidiſtanter lineæ abſciſſa- FIG. 34.
rum AB; ita, ſumpta in AC portione $AG = a$, tranſibit ea per punctum G.

324. Exiſtentibus igitur AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus, ad quem nos ducit æquatio $y - a = 0$, ſi, abſciſſa ex AC portione $AG = a$, agatur per punctum G recta XZ, ipſi AB parallela. Nam, quum rectæ, quæ ex ſingulis ipſius XZ punctis M demittuntur ſuper AB, æquidiſtanter alteri AC, fiant ipſi AG æquales; abſciſſa quidem x erit in loco variationi obnoxia, ſed ordinata y erit conſtans, & perpetuo æqualis datæ quantitati a.

CAPUT II.

Compoſitio locorum ad parabolam.

* art. 297. 325. Diximus ſuperius *, binas illas methodos, quibus locorum primi generis compoſitionem obtinuimus, locum etiam habere in compoſitione locorum ſecundi generis. Itaque, acturi de compoſitione locorum ad parabolam; primo quidem oſtendemus, quomodo componi poſſint hujuſmodi loca, adhibita formula, omnium ſimpliciſſima; tum deinde explicabimus, qua ratione fiat eorundem locorum compoſitio, in ſubſidium advocata formula, quæ ſit omnium maxime compoſita.

I. *Compoſitio locorum ad parabolam per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

326. In parabola caſus ſimpliciſſimus habetur, ad calculum revocata unius ex ejus diametris proprietate. Unde, quum vi hujus proprietatis habeatur quadratum cujuſvis ordinatæ æquale rectangulo, quod fit ex parametro in abſciſſam correſpondentem: vocando p parametrum, y unamquamque ordinatam, & x abſciſſam, quæ ei correſpondet; erit $y^2 = px$ æquatio, quæ exhibet pro locis ad parabolam formulam, omnium ſimpliciſſimam.

327. Oſtendendum eſt igitur, qua ratione ope hujus formulæ $y^2 = px$ ipſa ad parabolam loca componantur. Et primo quidem formulæ ip-

ipſius compoſitio nullam habet difficultatem. Eſto enim pro ea AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Abſcindatur ex AC portio AD $= p$. Jamque, ſi parabola deſcribatur, cujus AB ſit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD referat poſitionem ordinatarum; erit parabola iſta terminus loci quæſiti. FIG. 35.

328. Capiatur enim in AB portio quævis AN $= x$; tumque per punctum N, ad parabolam uſque, ducatur, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Quia ergo, propter parabolam, MN quadratum eſt æquale rectangulo DAN; erit $y^2 = px$. Et quamquam NM ducatur ad partem oppoſitam; adhuc tamen eadem orietur æquatio. Nam, etſi fiat in iſto caſu NM $= -y$; ejus tamen quadratum erit ſemper y^2.

329. Jam, ſicuti æquatio localis, quæ eſt duarum dimenſionum, ad parabolam nos ducit, ubi eam reducere licet ad formulam illam, hoc eſt ad terminos tales, ut ex una parte habeatur quadratum unius incognitæ, ex altera vero rectangulum ex incognita alia in datam quamvis quantitatem; ita, habita ſuæ reductionis ratione, facile erit, locum componere, quo eidem æquationi debet fieri ſatis.

330. Neque vero difficile erit, definire, qualis eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius $y^2 = px$. Primo enim, ſi in æquatione incognitæ duæ non reperiantur ſimul multiplicatæ, reducetur ad eam formam æquatio, quotieſcumque unius dumtaxat incognitæ quadratum in ea continetur.

331. Proponatur, exempli gratia, æquatio $y^2 + 2ay = cx - b^2$. Fiat $y + a = z$. Et quoniam

niam habetur $y^2 + 2ay + a^2 = z^2$, ſive $y^2 + 2ay = z^2 - a^2$; erit, ſubſtitutionis ope, $z^2 - a^2 = cx - b^2$, atque adeo $z^2 = cx + a^2 - b^2$. Fiat quoque $x + (a^2 - b^2) : c = u$: ita, ut ſit $cx + a^2 - b^2 = cu$. Et habebitur demum $z^2 = cu$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione, ſimpliciſſimum parabolæ caſum exhibente, $y^2 = px$.

332. Quod ſi autem in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiuſmodi æquatio formam induat iſtius $y^2 = px$, oportebit, ut in ea utriuſque incognitæ quadratum contineatur: ſed ita tamen, ut, tranſlatis ad eandem partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, iidem ſimul quadratum perfectum conſtituant.

333. Ita, ſi æquatio conſtruenda fuerit $y^2 - 2ay - 2xy + x^2 = cx + a^2$; jam tres termini $y^2 - 2xy + x^2$, ad unam partem exiſtentes, quadratum exhibent perfectum. Plane vero, ponendo $y - a - x = z$, erit $y^2 - 2ay + a^2 - 2xy + 2ax + x^2 = z^2$, ſive $y^2 - 2ay - 2xy + x^2 = z^2 - a^2 - 2ax$. Quare, per ſubſtitutionem, erit $z^2 - a^2 - 2ax = cx + a^2$, hoc eſt $z^2 = cx + 2ax + 2a^2$. Unde, ponendo quoque $x + 2a^2 : (c + 2a) = u$, & $c + 2a = b$: ita, ut ſit $cx + 2ax + 2a^2 = bu$; erit demum $z^2 = bu$; quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione parabolæ ſimpliciſſima $y^2 = px$.

II. *Præcedentis loca ad parabolam componendi rationis exempla ſimpliciora.*

334. UT exemplis oſtendamus, qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, loca ad parabolam componantur; proponatur primum æquatio $y^2 + 2ay = cx$. Fiat $y + a = z$. Quumque habeatur $y^2 + 2ay = z^2 - a^2$; erit $z^2 - a^2 = cx$, ſive $z^2 = cx + a^2$. Fiat quoque $x + a^2 : c = u$. Et quoniam poſitione iſta habetur $cx + a^2 = cu$; erit $z^2 = cu$ æquatio reducta.

335. Sint jam, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit itaque ipſius AB quælibet portio AN $= x$. Quumque habeatur $x + a^2 : c = u$: producendo BA uſque in D, ita, ut ſit AD $= a^2 : c$; fiet unaquæque DN $= x + a^2 : c = u$. Sed habetur etiam $y + a = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſingulis valoribus ipſius y addatur data quantitas a. FIG. 36.

336. Jam valores ipſius y correſpondent portionibus rectæ AB, quæ referunt valores incognitæ x. Quare, ſi extendatur CA verſus E, ita, ut ſit AE $= a$, & per punctum E ducatur recta FG, ipſi AB parallela; exibunt ex punctis ipſius FG valores incognitæ z. Quumque valores iſti inſiſtere debeant ſuper valoribus alterius incognitæ u; oportebit, non quidem ſuper DB, ſed ſuper FG, quæ ei eſt parallela, ſumere valores ipſius u.

337. Itaque, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $z^2 = cu$, FG li-

linea abſciſſarum, & FD linea ordinatarum. Quare, ſi, ſumpta ſuper FD portione $FH = c$, deſcribatur parabola, cujus FG ſit diameter, FH parameter diametri, & eadem FH referat poſitionem ordinatarum; per parabolam iſtam fiet ſatis æquationi reductæ $z^2 = cu$. Sed eodem interim loco fiet etiam ſatis æquationi propoſitæ $y^2 + 2ay = cx$.

338. Ducatur enim ex puncto N, ipſi AC æquidiſtanter, recta $NM = y$. Jamque, ſi hæc conveniat cum diametro parabolæ FG in puncto O, fiet $OM = y + a$. Eſt autem, propter parabolam, quadratum ex OM æquale rectangulo HFO. Itaque, quum ſit $FO = x + a^2 : c$, & $FH = c$; erit $y^2 + 2ay + a^2 = cx + a^2$; & conſequenter $y^2 + 2ay = cx$, quæ eſt æquatio propoſita.

339. Quemadmodum autem, ob $AE = a$, & AD, ſive $EF = a^2 : c$, parabola tranſit per punctum A; ita demonſtratio, a nobis allata, pro ea tantum parabolæ portione locum habet, quæ exiſtit in angulo BAC. Interim facile erit, ad omnes alias parabolæ portiones eandem demonſtrationem extendere, modo habeatur ratio ſitus, quem in aliis illis parabolæ portionibus obtinent rectæ, quibus pro inventione æquationis opus eſt.

340. Proponatur ſecundo æquatio $y^2 - 2ay = b^2 - cx$, quæ ſimiliter ad parabolam nos ducit. Fiat $y - a = z$. Et quoniam habetur $y^2 - 2ay + a^2 = z^2$, ſive $y^2 - 2ay = z^2 - a^2$; ſubſtitutione peracta, erit $z^2 - a^2 = b^2 - cx$, aut etiam $z^2 = a^2 + b^2 - cx$. Ponatur quoque $(a^2 + b^2) : c - x = u$. Quumque

que habeatur $a^2 + b^2 - cx = cu$; erit rurſus, ope ſubſtitutionis, $z^2 = cu$ æquatio reducta.

341. Sint nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. FIG. 37.
Fiet igitur ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Et quoniam habetur $(a^2 + b^2) : c - x = u$: abſcindendo ex AB portionem AD $= (a^2 + b^2) : c$, & ponendo unamquamque ipſarum AN minorem, quam AD; erit unaquæque reliquarum portionum DN $= (a^2 + b^2) : c - x = u$. Sed habetur etiam $y - a = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y minuantur data quantitate a.

342. Quum ergo valores incognitæ y correſpondeant portionibus rectæ AB, quæ referunt valores alterius incognitæ x; nemo non videt, quod, ſi abſcindatur ex AC portio AE $= a$, & per punctum E ducatur recta FG, ipſi BA parallela, exire debent ex punctis ipſius FG valores incognitæ z. Et quoniam valores iſti inſiſtant oportet ſuper valoribus alterius incognitæ u: plane neceſſe eſt, ut, non jam ſuper DA, ſed ſuper FG, quæ ei eſt parallela, capiantur valores ipſius u.

343. Hinc, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $z^2 = cu$, FG linea abſciſſarum, & DF linea ordinatarum. Quare, ſi, ſumpta ſuper DF portione FH $= c$, deſcribatur parabola, cujus FG ſit diameter, FH parameter diametri, & eadem FH referat poſitionem ordinatarum; fiet parabola iſta locus reductæ æquationis $z^2 = cu$. Sed eadem parabola terminabitur quoq; locus propoſitæ æquationis

344. Ducatur namque ex puncto N, ipſi

AC

AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Et jam, ſi hæc conveniat cum parabolæ diametro FG in puncto O, fiet OM $= y - a$. Eſt autem, propter parabolam, quadratum ex OM æquale rectangulo HFO. Quare, quum ſit FO $= (a^2 + b^2) : c - x$, & FH $= c$; erit $y^2 - 2ay + a^2 = a^2 + b^2 - cx$; atque adeo $y^2 - 2ay = b^2 - cx$, quæ eſt æquatio propoſita.

345. Cæterum in hoc loco parabola tranſire nequit per punctum A. Nam, quum ſit AD, ſive FE $= (a^2 + b^2) : c$, & AE $= a$, erit AE quadratum minus rectangulo HFE. Sed hic quoque notare oportet, quod, etſi demonſtratio, a nobis allata, pro ea tantum parabolæ portione locum habet, quæ exiſtit in angulo EFH, & terminatur ad rectam AE, ulterius productam; eadem tamen ad omnes alias parabolæ portiones ſe extendet, ſi habeatur ratio ſitus, quem in iis obtinent rectæ, quibus pro inventione æquationis opus eſt.

III. *Ejuſdem loca ad parabolam componendi rationis exempla magis compoſita.*

346. QUæ modo attulimus exempla, pro explicanda compoſitione locorum ad parabolam, per reductionem æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, paulo ſimpliciora fuere; nunc alia in medium afferemus, magis compoſita. Itaque proponatur ulterius æquatio $y^2 + 2axy : c + a^2x^2 : c^2 = ax - b^2$, quæ adhuc ad parabolam nos ducit; quum $x^2 + 2axy : c + a^2x^2 : c^2$ ſit quadratum perfectum. Fiat igitur $y + ax : c = z$. Quumque habeatur $y^2 +$

2axy

$2axy : c + a^2x^2 : c^2 = z^2$; erit $z^2 = ax - b^2$. Fiat quoque $x - b^2 : c = u$. Et quoniam habetur $cx - b^2 = cu$; erit $z^2 = cu$ æquatio reducta.

347. Sint nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit ergo ipſius AB portio quælibet AN $= x$. FIG. 38. Quumque habeatur $x - b^2 : c = u$; abſcindendo ex AB portionem AD $= b^2 : c$, erit unaquæque reliquarum portionum DN $= x - b^2 : c = u$. Jam vero habetur quoque $y + ax : c = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y augeantur quantitate $ax : c$, quæ nequaquam eſt data.

348. Etſi autem quantitas $ax : c$ data non ſit, variatur tamen ſubinde, ut cum altera variabili x ſervet perpetuo datam rationem, quam habet a ad c. Unde, ſi ad plagam oppoſitam ducatur recta DE, ipſi CA parallela, talis longitudinis, ut AD ſit ad DE, veluti eſt c ad a, & agatur per punctum E recta AF; terminabuntur ad rectam iſtam valores incognitæ z; quandoquidem, ductis ad eam rectis NO, eidem CA parallelis, fiet quælibet NO $= ax : c$: & ea propter diameter deſcribendæ parabolæ, non jam erit DB, ſed EF; quum in æquatione reducta $z^2 = cu$ referant z ipſius diametri ordinatas.

349. Hinc etiam, etſi æquatio reducta ſit $z^2 = cu$, multum tamen abeſt, ut poſſit eſſe c parameter diametri. Nam, poſito, quod AD ſit ad AE, veluti eſt c ad m; fiet quælibet diametri portio EO $= mu : c$: proindeque quæſitam parametrum talem eſſe oportebit, ut eadem ducta in $mu : c$ producat cu. Unde, ſi ea voce-

tur

tur p, fiet $pmu : c = cu$, hoc eſt $pm : c = c$: ex quo infertur $p = c^2 : m$. Abſcindatur ergo ex ED producta, ſi opus, portio EH $= c^2 : m$. Et, ſicuti EF eſt diameter parabolæ deſcribendæ; ita deſignabit EH, tum parametrum hujus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum.

350. Neque vero difficile erit oſtendere, quod, per hujuſmodi parabolam, ſit ſatis propoſitæ æquationi $y^2 + 2axy : c + a^2x^2 : c^2 = cx - b^2$. Producta enim aliqua ipſarum ON, uſque donec parabolæ occurrat in M, poſitaque NM $= y$; fiet tota MO $= y + ax : c$. Quum autem habeatur $u = x - b^2 : c$, ſitque portio EO $= mu : c$; erit, per ſubſtitutionem, eadem EO $= mx : c - mb^2 : c^2$. Unde, quum, propter parabolam, MO quadratum eſſe debeat æquale rectangulo HEO; erit $y^2 + 2axy : c + a^2x^2 : c^2 = cx - b^2$.

351. Notandum interim hoc loco eſt, quod, ſicuti parabola, quæ deſcribitur diametro EF, poteſt aliquam ipſius AB portionem intercipere; ita allata demonſtratio pro ea tantum parabolæ portione locum habet, quam ipſius AB intercepta portio ſubtendit. Sed nihilominus facile erit, eandem demonſtrationem ad alias parabolæ portiones extendere: ſcilicet, ſi habeatur ratio ſitus, quem obtinent rectæ, quibus pro inventione æquationis eſt opus.

352. Proponatur quoque conſtruenda æquatio $y^2 - 2ay - 2xy + x^2 = bx$, quæ ſimiliter locum exhibet ad parabolam, ob tres terminos $y^2 - 2xy + x^2$, quadratum perfectum conſtituentes. Fiat $y - a - x = z$. Quumque habeatur $y^2 - 2ay - 2xy + x^2 = z^2 -$

2ax

$2ax - a^2$; erit, ſubſtitutionis ope, $z^2 - 2ax - a^2 = bx$, ſive etiam $z^2 = 2ax + bx + a^2$. Capiatur quoque, tum $x + a^2 : (2a + b) = u$, cum $2a + b = c$: ita, ut ſit, $2ax + bx + a^2 = cu$; & erit $z^2 = cu$ æquatio reducta.

353. Sint jam, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit igitur ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Et quoniam in reductione habetur $x + a^2 : (2a+b) = u$: producendo BA uſque in D, donec fuerit AD $= a^2 : (2a + b)$; fiet quælibet ipſarum DN $= x + a^2 : (2a + b) = u$. Sed habetur quoque $y - a - x = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y minuantur, tum quantitate data a, cum altera variabili x. FIG. 39.

354. Et quidem minuentur valores illi quantitate variabili x, ſi ducta ad plagam oppoſitam recta DE, parallela ipſi CA, & æquali alteri AD, agatur per punctum A recta EF; minuentur vero iidem valores data quantitate a, ſi abſciſſa ex ED producta, ſi opus, portione EG $= a$, ducatur per punctum G recta GH, ipſi EF parallela. Exeat namque ex aliquo punctorum N recta NO, æquidiſtanter ipſi AC, quæ conveniat cum EF in R, & cum GH in O. Erit igitur NR æqualis ipſi AN, & RO æqualis ipſi EG. Unde, quum fiat NR $= x$, & RO $= a$; erit NO $= x + a$.

355. Hinc valores incognitæ z terminabuntur ad rectam GH; proindeque erit recta iſta GH diameter parabolæ deſcribendæ. Unde etiam, etſi æquatio reducta ſit $z^2 = cu$, multum tamen abeſt, ut c ſit parameter diametri,

 Nam,

Nam, poſito, quod AD ſit ad AE, veluti eſt a ad m, fiet quelibet diametri portio ER, ſive GO $= mu : a$; adeoque quæſitam parametrum talem eſſe oportebit, ut ducta in $mu : a$ producat cu. Quocirca, ſi ea vocetur p; fiet $pmu : a = cu$, hoc eſt $pm : a = c$: unde infertur $p = ac : m = (2a^2 + ab) : m$.

356. Abſcindatur itaque ex GE producta ſi opus portio GK$=(2a^2+ab) : m$; &, ſicuti GH eſt diameter parabolæ deſcribendæ; ita deſignabit GK, tum parametrum hujus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Nam, producta NO uſque donec parabolæ occurrat in M, poſitaque NM $= y$; fiet reliqua MO $= y - a - x$. Quum autem habeatur $u = x + a^2 : (2a + b)$, ſitque portio GO $= mu : a$; erit, per ſubſtitutionem, eadem GO $= mx : a + ma : (2a + b)$. Unde, quia, propter parabolam, MO quadratum eſt æquale rectangulo KGO; erit $y^2 - 2ay + a^2 - 2xy + 2ax + x^2 = 2ax + bx + a^2$, ſive $y^2 - 2ay - 2xy + x^2 = bx$.

357. Hic pariter notari ſedulo debet, quod demonſtratio, a nobis allata, pro ea tantum parabolæ portione locum habet, quæ continetur in angulo HLC. Sed facile erit, eandem demonſtrationem ad omnes alias parabolæ portiones extendere; ſi ſcilicet habeatur ratio ſitus, quem obtinent rectæ, quibus pro inventione æquationis eſt opus; ut hinc per quodlibet deſcriptæ parabolæ punctum fiet ſatis æquationi propoſitæ.

IV.

IV. *Compoſitio locorum ad parabolam per formulam, omnium maxime compoſitam.*

358. EXpoſita ratione componendi loca ad parabolam, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam; videamus modo, quo pacto eadem loca ad parabolam conſtrui debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita: quem in finem, qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

359. Nimirum, referendo parabolæ puncta omnia ad rectam, poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ; perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta, poſitióne data, ſit ipſa illa diameter. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula parabolæ, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

360. Sit igitur GH aliqua parabolæ diameter, ſitque etiam GK recta, quæ exhibet, tum parametrum ejus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Agatur deinde AE, eidem diametro parallela, & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quodvis D. Et, ductis rectis AF, DE, ipſi GK parallelis, & convenientibus cum aliis GH, AE in punctis F, & E, ponatur AD $= x$, DE $= y$, AE $= s$, GK $= p$, AF $= q$, & GF $= r$. FIG. 40.

K 2 361.

361. Capiatur nunc in parabola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum GH ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AE in R; ponaturque inſuper AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AD ad DE; erit NR $= mx : n$; adeoque, ob æquales RO, AF, erit MO $= y + mx : n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ſive FO, ut AD ad AE, erit FO $= sx : n$, & conſequenter GO $= r + sx : n$. Eſt autem, propter parabolam, MO quadratum æquale rectangulo KGO. Itaque erit $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + 2mqx : n + q^2 = pr + psx : n$, ſive $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + (2mq - ps)x : n + (q^2 - pr) = 0$.

362. Hæc igitur eſt æquatio, quæ exhibet nobis formulam parabolæ, omnium maxime compoſitam. Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formula tres terminos $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2$ quadratum perfectum conſtituere; nec poſſe in ea deficere terminum $2mxy : n$, quin ſimul deficiat terminus alter $m^2x^2 : n^2$, maneatque tantum
*art. 330. quadratum y^2. Unde veritas regulæ, ſuperius *
331. traditæ, pro cognoſcendis locis ad parabolam, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

363. Qua porro ratione, ope inventæ formulæ generalis, loca ad parabolam conſtruantur; haud arduum erit intelligere. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ; danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Quod ſi vero earum aliqua oriatur negativa; tunc recta, quam

quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

364. Cæterum quantitates, quæ locum determinant, ſunt *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s*. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum *p*, *q*, *r* valores innoteſcunt. Et quantum ad priores duas *m*, & *n*, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum; & tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius *n*, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

365. Determinatis valoribus ipſarum *m*, & *n*, etiam quantitatis *s* valor innoteſcet. In triangulo enim DAE notus eſt angulus ADE, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AD, DE, deſignata per quantitates *n*, & *m*, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque tertium latus AE, quod exhibet quantitas *s*. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius *m* nullus reperitur; quandoquidem, evaneſcente DE, cadit AB ſuper AE, & puncta duo D, & E coeunt in unum.

366. Illud quoque reticere hic nolo, quod, ubi valor parametri *p* prodit negativus, tunc ipſa parabola revolvenda eſt concavitate ſua ad plagam oppoſitam. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam negatio illa, non tam afficit parametrum, quam abſciſſam, in quam parameter multiplicata reperitur. Unde, quum abſciſſa capienda ſit ad partem contrariam; omnino neceſſe eſt, ut parabola ſua concavitate reſpiciat quoque plagam oppoſitam.

V. *Præcedens loca ad parabolam componendi ratio, exemplis illuſtrata.*

367. UT exemplis notior evadat præcedens loca ad parabolam componendi ratio, proponatur primum conſtruenda æquatio $y^2 - 2ay + cx = 0$, cui non aliter, quam per parabolam, fieri debet ſatis. Sane, quia in æquatione iſta deeſt terminus xy; fractio $2m:n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum
*art. 365. ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante * notata ſunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $y^2 + 2qy - px + (q^2 - pr) = 0$.

368. Jam, inſtituta comparatione, habebitur $2q = -2a$, $p = -c$, & $q^2 - pr = 0$. Quare, ſicuti eſt $p = -c$, ita erit $q = -a$, & $r = q^2 : p = -a^2 : c$. Hinc, exiſtentibus AB
FIG. 41. linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus quæſitus in hunc modum. Abſcindatur ex AC portio AF $= a$. Tum, ducta FH, ipſi AB parallela, abſcindatur ex ea portio FG $= a^2 : c$. Agatur poſtea GK, æquidiſtanter rectæ AC, & talis longitudinis, ut ſit GK $= c$. Et parabola, quæ deſcribitur diametro GF, & parametro GK quæſitum locum exhibebit.

369. Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur uſque donec ipſi AB occurrat in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$; erit ex conſtructione GO $= a^2 : c - x$, & MO $= y - a$. Jam vero, propter parabolam, MO quadratum eſt æquale rectangulo KGO. Quare erit $y^2 -$

2ay

$2ay + a^2 = a^2 - cx$, ſive etiam $y^2 - 2ay + cx = 0$, quam liquet eſſe æquationem propoſitam. Eidem autem æquationi ſingulis parabolæ punctis ſatisfieri; facile erit, calculo comprobare.

370. Oporteat etiam, conſtruere æquationem $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 + 2ay - cx = 0$, quæ ſimiliter locum exhibet ad parabolam. Quia hic adeſt terminus xy; inſtituta comparatione, habebitur primo $2m : n = - 2a : c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $2m = - 2a$, ſive $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $2q = 2a$, $(2qm - ps) : n = - c$, & $q^2 - pr = 0$: unde eruitur primo $q = a$, ſecundo $p = (2qm + cn) : s = (c^2 - 2a^2) : s$, & tertio $r = q^2 : p = a^2s : (c^2 - 2a^2)$.

371. Jam circa quantitatem $c^2 - 2a^2$ tria contingere poſſunt; ſed ponamus, partem ejus poſitivam c^2 majorem eſſe parte negativa $2a^2$; qua ratione, ſicuti poſitiva erit quantitas $c^2 - 2a^2$, ſic valores ipſarum p, & r fient pariter poſitivi. Hinc, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum; componetur in hunc, qui ſequitur, modum locus, per quem propoſitæ æquationi fieri debet ſatis. FIG. 42.

372. Nimirum, ſumpta ſuper AB portione $AD = c$, & ducta $DE = a$, parallela quidem ipſi AC, ſed ad plagam oppoſitam ei, verſus quam tendit in figura formulæ, jungatur AE. Extendatur porro CA in F, uſque donec fuerit $AF = a$, & ducatur per punctum F, ipſi EA æquidiſtanter, recta GH, ſuper qua ſurſum verſus capiatur portio $FG = a^2s : (c^2 - 2a^2)$. Denique conſtituatur $GK = (c^2 - 2a^2) : s$. Et parabola, quæ deſcribitur diametro GH, &

para metro GK dabit locum quæſitum.

373. Ducatur namque ex aliquo ejus puncto M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipſis AB, AE in N, & R; ponaturque AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AD eſt ad DE, ut AN ad NR; erit NR $= ax : c$. Quumque etiam AD ſit ad AE, ut AN ad AR, ſive FO; erit FO $= sx : c$. Unde fiet MO $= y - ax : c + a$, & GO $= sx : c + a^2 s : (c^2 - 2a^2)$. Eſt autem, propter parabolam, MO quadratum æquale rectangulo KGO. Itaque erit $y^2 - 2axy : c + a^2 x^2 : c^2 + 2ay - 2a^2 x : c + a^2 = cx - 2a^2 x : c + a^2$, quæ reducta dabit æquationem propoſitam $y^2 - 2axy : c + a^2 x^2 : c^2 + 2ay - cx = 0$.

374. Cæterum, ſicuti valores quantitatum p, & r inveniuntur poſitivi, quotieſcumque c^2 major eſt, quam $2a^2$; ita iidem valores orientur negativi, ubi per contrarium c^2 minor eſt, quam $2a^2$. Id vero quum contingit, non aliud fieri debet, quam ſumere FG deorſum verſus, ipſamque parabolam ſubinde deſcribere, ut concavitate ſua reſpiciat quoque plagam oppoſitam. Sed fieri quoque poteſt, ut ſit $c^2 = 2a^2$. Quumque in hoc caſu quantitas $c^2 - 2a^2$ fiat nihilo æqualis; evaneſcet quoque valor parametri p, ipſa autem r infinita reperietur.

375. Id vero mirum cenſeri non debet: Nam, ubi habetur $c^2 = 2a^2$, duo parabolæ crura vertuntur in binas rectas, diametro GH parallelas; quarum una eſt ipſa AE, tranſiens per punctum A; altera in eadem a diametro diſtantia jacet ad partem oppoſitam. Nec ſane difficile hoc erit oſtendere. Ubi enim habetur $c^2 = 2a^2$; erit $c = 2a^2 : c$, & $cx = 2a^2 x : c$. Qua-

res

re æquatio propoſita vertetur in hanc aliam $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 + 2ay - 2a^2x : c = 0$: proindeque, addendo hinc inde a^2, erit $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 + 2ay - 2a^2x : c + a^2 = a^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis dabit $y - ax : c + a = a$, ſive $y = ax : c$.

376. Huic autem æquationi fieri ſatis per rectam AE; perſpicuum quidem eſt. Nam, quum ſit, ut AD ad DE, ita AN ad NR; erit NR $= ax : c$. Quare, poſita eadem NR $= y$, fiet $y = ax : c$. Quoniam vero, per extractionem quadratæ radicis ex utraque parte æquationis $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 + 2ay - 2a^2x : c + a^2 = a^2$ habetur quoque $-y + ax : c - a = a$, ſive $-y = 2a - ax : c$; hinc eſt, ut locus componendus, præter rectam AE, aliam exigat, ei parallelam, ad partem alteram ipſius GH in eadem diſtantia collocatam.

VI. *Monitum circa compoſitionem locorum ad parabolam.*

377. QUemadmodum in æquationibus localibus, quæ ad parabolam nos ducunt, aſſumpſimus ſemper x, & y pro duabus earum incognitis; ita in earundem conſtructione illud perpetuo curavimus, ut abſciſſæ quidem AN, capiendæ ſuper AB, deſignarent valores incognitæ x; ordinatæ vero NM, ducendæ æquidiſtanter alteri AC, repræſentarent valores alterius incognitæ y.

378. Sed notari hic ſedulo debet, quod, exiſtentibus x, & y duabus coſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poteſt, ut de-

deſignari debeant per abſciſſas quidem AN valores incognitæ y, per ordinatas vero NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane, in utraque loca componendi ratione, difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

379. Nimirum, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, fieri id debet, quotieſcumque in æquatione reducta ad quadratum elevata reperitur, vel incognita x, vel quæ ex ipſa dependet; & viciſſim per parametrum, ſive potius per datam quantitatem multiplicata occurrit, vel incognita y, vel quæ ex ea proficiſcitur.

380. Hac ratione æquatio $x^2 - 2ax = cy$ mutationem illam expoſcit. Nam, faciendo $x - a = z$, & $y + a^2 : c = u$, habetur loco ejus hæc alia $z^2 = cu$: ubi quidem incognita z, quæ ad quadratum attollitur, dependet ex x; alia vero incognita u, quæ multiplicata reperitur per parametrum, viciſſim ex y trahit originem ſuam.

381. Quotieſcumque vero conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam, omnium maxime compoſitam, illud idem fieri debet, quando in æquatione conſtruenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic ſequens æquatio $x^2 - 2axy : c + a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$ exigit quoque eam variationem; quia quadratum incognitæ x illud eſt, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

382. Patet autem, dari poſſe loca quædam, quæ utroque modo conſtrui queant. Hujuſmodi eſt ſequens æquatio $x^2 - 2xy + y^2 - 2ax = 0$. Nam primo in ea utriuſque incognitæ

qua-

quadratum omni vacat fractione. Et deinde, ſi ſiat $y - x = z$, habebitur loco ejus hæc alia $z^2 - 2ax = 0$; ſi vero ponatur $x - y - a = z$, & $y + a : 2 = u$, fiet $z^2 = 2au$ æquatio reducta.

383. Illud quoque perſpicuum eſt, quod ubi æquatio, quæ ad parabolam nos ducit, conſtruitur per reductionem ejus ad formulam, omnium maxime compoſitam, eademque natura ſua mutationem illam expoſcit, debent etiam in formula incognitæ permutari: adeo nempe, ut ſcribere oportebit incognitam x loco alterius y, & viciſſim incognitam y loco alterius x.

384. Ita æquatio $x^2 - 2axy : c + a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$, ob quadratum x^2 omni fractione denudatum, exigit eam mutationem. Plane vero formula, cum qua comparanda eſt illiuſmodi æquatio, haud quidem eſſe debet $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + (2qm - ps)\,x : n + (q^2 - pr) = 0$, ſed $x^2 + 2mxy : n + m^2y^2 : n^2 + 2qx + (2qm - ps)\,y : n + (q^2 - pr) = 0$.

385. Sed nolo hic reticere, quod, præparata per vulgatas operationes æquatione conſtruenda, licebit interdum, etiam abſque ea variatione, compoſitionem ipſius obtinere. Ita, ſi æquationis $x^2 - 2axy : c + a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$ termini omnes, primo multiplicentur per c^2, deinde dividantur per a^2; habebitur loco ejus hæc alia $c^2x^2 : a^2 - 2cxy : a + y^2 - 2c^2x : a - 2bc^2y : a^2 + c^4 : a^2 = 0$, pro cujus conſtructione nulla variatione eſt opus; quum jam in ea quadratum y^2 omni fractione ſit denudatum.

386. Id vero quum ita ſit, liquet, in compo-

poſitione locorum ad parabolam, tunc demum, exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, deſignandas eſſe per abſciſſas AN valores incognitæ y, & per ordinatas NM valores alterius incognitæ x, quum fieri nullo pacto poteſt, ut in ipſa æquatione quadratum y^2 omni omnino fractione ſit denudatum. Patet autem, hunc caſum tunc dumtaxat obtinere, ubi in æquatione conſtruenda deeſt quadratum y^2, ſive potius, ubi numerator fractionis, per quam multiplicatum reperitur, eſt zero, ſeu nihil.

387. Cæterum, quod iſtiuſmodi caſus in allata formula generali non continetur, haud difficile erit oſtendere. Ubi enim * quæſtio fuit de invenienda formula illa, retulimus parabolæ puncta omnia ad rectam, poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ, hoc eſt, quæ datum angulum conſtituant cum ipſis parabolæ diametris. Sed eadem parabolæ puncta ad rectam, poſitione datam, referre etiam licebit per rectas alias, quæ ſint parabolæ diametris parallelæ: & profecto caſus iſte variationem illam, de qua agimus, neceſſario exigit.

* art. 359.

CAPUT III.

Compoſitio locorum ad ellipſim, & circuli circumferentiam.

388. OStenſa compoſitione locorum ad parabolam; ſequitur modo, ut eorum, quæ ſunt ad ellipſim, compoſitionem oſtendamus. Cum iis autem conjungemus quo-

que

que loca, quæ circuli circumferentia terminantur. Enim vero, ut ſæpius dictum eſt, circulus velut ſpecies quædam ellipſis debet haberi. Similiter vero, acturi de compoſitione horum locorum; primo quidem oſtendemus, qua ratione ea componantur, adhibita formula, omnium ſimpliciſſima; tum eorundem compoſitionem explicabimus per formulam, omnium maxime compoſitam.

I. *Ratio componendi loca ad ellipſim per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

389. IN ellipſi, non ſecus ac in parabola, caſus ſimpliciſſimus habetur, ad calculum revocata unius ex ſuis diametris proprietate. Quum autem in diametro ellipſis duo ſint vertices; præſtat, velut originem abſciſſarum aſſumere, non jam unum ex verticibus, ſed ipſius ellipſeos centrum, a quo diameter biſecatur. Plane vero, ſi dicatur t ſemidiameter, y quælibet ordinatarum, & x abſciſſa, ordinatæ correſpondens: tum item ratio parametri ad diametrum ponatur æqualis ei, quam habet n ad m; erit, ut y^2 ad $t^2 - x^2$, ita n ad m: proindeque in ellipſi formula, omnium ſimpliciſſima, erit $my^2 : n = t^2 - x^2$.

390. Oſtendendum eſt igitur, qua ratione, ope hujus formulæ $my^2 : n = t^2 - x^2$ ipſa ad ellipſim loca componantur. Et primo quidem formulæ ipſius compoſitio nullam habet difficultatem. Eſto etenim, pro ea, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiantur ſuper AB, hinc inde a puncto A, portiones AD, FIG 43.

Ad

Ad ejus longitudinis, ut ſit, tam AD, quam Ad $= t$. Deinde agatur per D, ipſi AC æquidiſtanter, recta DE, talem habens longitudinem, ut DE ſit ad Dd, veluti eſt n ad m. Jamque, ſi ellipſis deſcribatur, cujus Dd ſit diameter, DE parameter diametri, & eadem DE referat poſitionem ordinatarum; erit ellipſis iſta terminus loci quæſiti.

391. Capiatur enim in AD portio quævis AN $= x$, tumque per punctum N, ad ellipſim uſque, ducatur ipſi AC æquidiſtanter recta NM $= y$. Quia ergo, propter ellipſim, MN quadratum eſt ad rectangulum DNd, ſive differentiam quadratorum AD, AN, ut eſt DE ad Dd; erit, ut y^2 ad $t^2 - x^2$, ita n ad m: proindeque erit $my^2 : n = t^2 - x^2$. Et quamquam, vel alterutra, vel utraque ipſarum AN, NM capiatur ad partes contrarias; adhuc tamen eadem orietur æquatio. Nam, etſi fiat in iſto caſu AN $= -x$, & NM $= -y$; ipſarum tamen quadrata erunt ſemper x^2, & y^2. Unde ſemper habebitur, ut y^2 ad $t^2 - x^2$, ita n ad m.

392. Jam, ſicuti æquatio localis, quæ eſt duarum dimenſionum, ad ellipſim nos ducit, ubi eam reducere licet ad formulam illam; ita, habita ſuæ reductionis ratione, facile erit, locum componere, quo eidem æquationi debet fieri ſatis. Cujuſmodi autem eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius $my^2 : n = t^2 - x^2$, haud arduum erit definire. Primo enim, ſi in æquatione non reperiuntur incognitæ duæ ſimul multiplicatæ, reducetur ad eam formam æquatio, ubi ab utraque ejus parte exiſtunt quadrata incognitarum, contrariis ſignis affecta.

393.

393. Proponatur, exempli gratia, æquatio $ay^2 : c - 2ay = 2bx - x^2$. Fiat $b - x = u$. Et quoniam habetur $b^2 - 2bx + x^2 = u^2$, ſive $b^2 - u^2 = 2bx - x^2$; ſubſtitutione peracta, erit $ay^2 : c - 2ay = b^2 - u^2$, ſive etiam $y^2 - 2cy = cb^2 : a - cu^2 : a$. Fiat quoque $y - c = z$. Quumque habeatur $y^2 - 2cy + c^2 = z^2$, ſive $y^2 - 2cy = z^2 - c^2$; erit, rurſus per ſubſtitutionem, $z^2 - c^2 = cb^2 : a - cu^2 : a$, ſive etiam $az^2 : c = b^2 + ac - u^2$. Ponatur porro $b^2 + ac = d^2$; & habebitur demum $az^2 : c = d^2 - u^2$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione ellipſis ſimpliciſſima $my^2 : n = t^2 - x^2$.

394. Quod ſi autem in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiuſmodi æquatio formam induat iſtius $my^2 : n = t^2 - x^2$, oportebit, utriuſque incognitæ quadratum ita quidem in ea contineri, ut, tranſlatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, & liberato quadratorum uno ab omni coefficiente, debeat coefficiens alterius quadrati minui nonnihil, quo omnes ii termini poſſint ſimul quadratum perfectum conſtituere.

395. Ut, ſi æquatio fuerit $y^2 - 2ay + 2axy : c + 2a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$; ponendo $y - a + ax : c = z$, erit $y^2 - 2ay + 2axy : c + a^2x^2 : c^2 = z^2 + 2a^2x : c - a^2$. Quare, ſubſtitutionis ope, fiet $z^2 + 2a^2x : c - a^2 + a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$, ſive etiam $c^2z^2 : a^2 + 2cx - c^2 + x^2 + 2bc^2x : a^2 = 0$. Hinc, ponendo quoque $x + c + bc^2 : a^2 = u$; ita, ut ſit $x^2 + 2cx +$

$2bc^2x : a^2 = u^2 - c^2 - 2bc^3 : a^2 - b^2c^4 : a^4$ erit, rurſus per ſubſtitutionem, $c^2z^2 : a^2 + u^2 - 2c^2 - 2bc^3 : a^2 - b^2c^4 : a^4 = 0$. Et, faciendo adhuc $2c^2 + 2bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4 = d^2$; erit demum $c^2z^2 : a^2 + u^2 - d^2 = 0$, ſive etiam $c^2z^2 : a^2 = d^2 - u^2$.

II. *Præcedentis loca ad ellipſim componendi rationis exempla ſimpliciora.*

396. UT exemplis oſtendamus, qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, loca ad ellipſim componantur, proponatur primum conſtruenda æquatio $ay^2 : c - 2ay = 2bx - x^2$,
art. 393 quæ, ut vidimus paulo ante, reducitur ad $az^2 : c = d^2 - u^2$, ponendo $b - x = u$, $y - c = z$, & $b^2 + ac = d^2$. Jamque, ſi AB ſit linea abſciſ-
FIG. 44. ſarum, & AC linea ordinatarum; fiet ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Unde, quum habeatur $b - x = u$: abſcindendo ex AB portionem AD $= b$, & capiendo quamlibet AN minorem, quam AD; erit unaquæque reliquarum DN $= b - x = u$.

397. Quia vero habetur quoque $y - c = z$; liquet, valores incognitæ z non aliter haberi poſſe, niſi ſinguli valores ipſius y minuantur data quantitate c. Quare, quum valores incognitæ y correſpondeant portionibus rectæ AB, quæ referunt valores alterius incognitæ x; perſpicuum eſt, quod, abſciſſa ex AC portione AE $= c$, & ducta per punctum E recta EG ipſi AB parallela, exire debent ex punctis ipſius EG valores incognitæ z. Quumque valores iſti inſi-

ſtant

ſtant oportet ſuper valoribus alterius incognitæ u : plane neceſſe eſt, ut, non jam ſuper DB, ſed ſuper EG, quæ eſt ei parallela, valores capiantur ipſius u.

398. Hinc, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $az^2 : c = d^2 - u^2$ FG linea abſciſſarum, & DF linea ordinatarum. Quare, ſi ſumptis ſuper FG hinc inde a puncto F portionibus FG, Fg, quarum unaquæque ſit æqualis quantitati d; ductaque GH, ipſi DF parallela, talis longitudinis, ut ſit GH ad Gg, veluti eſt c ad a: deſcribatur ellipſis, cujus Gg ſit diameter, GH parameter diametri, & eadem GH referat poſitionem ordinatarum; fiet ellipſis iſta locus reductæ æquationis $az^2 : c = d^2 - u^2$. Sed eadem ellipſi terminabitur quoque locus propoſitæ æquationis $ay^2 : c - 2ay = 2bx - x^2$.

399. Ducatur namque ex puncto N, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Jamque, ſi hæc conveniat cum ellipſis diametro Gg in puncto O, fiet OM $= y - c$. Eſt autem, propter ellipſim, ut OM quadratum ad differentiam quadratorum FG, FO, ita GH ad Gg. Quare, quum ſit FG $= d = \sqrt{(b^2 + ac)}$, & FO $= b - x$; erit, ut $y^2 - 2cy + c^2$ ad $ac + 2bx - x^2$, ita c ad a proindeque erit $ay^2 : c - 2ay + ac = ac + 2bx - x^2$, ſive $ay^2 : c - 2ay = 2bx - x^2$, quæ eſt æquatio propoſita.

400. Verum quidem eſt, demonſtrationem, a nobis allatam, obtinere dumtaxat relate ad eam ellipſis portionem, contentam in angulo, quem recta DF, ulterius producta, conſtituit cum ſemidiametro FG, ſed facile erit, eandem extendere ad omnes alias ellipſis portiones: mo-

do habeatur ratio ſitus rectarum, quibus pro inventione æquationis opus eſt; ut hinc nullum erit punctum in ellipſi, per quod propoſitæ æquationi non poſſit fieri ſatis. Id vero etiam in ſequentibus exemplis obſervandum eſt; & ſufficiat, ſemel illud adnotaſſe, ne ſæpius idem repetere cogamur.

401. Proponatur ſecundo æquatio $by^2 : a + 2by = c^2 - 2ax - x^2$, quæ ſimiliter ad ellipſim nos ducit. Fiat primo $x + a = u$. Et quoniam habetur $x^2 + 2ax = u^2 - a^2$; erit, per ſubſtitutionem, $by^2 : a + 2by = c^2 + a^2 - u^2$, ſive $y^2 + 2ay = ac^2 : b + a^3 : b - au^2 : b$. Fiat quoque $y + a = z$. Quumque habeatur $y^2 + 2ay = z^2 - a^2$; erit, rurſus ſubſtitutionis ope, $z^2 - a^2 = ac^2 : b + a^3 : b - au^2 : b$, ſive $bz^2 : a = ab + c^2 + a^2 - u^2$. Ponatur denique $ab + c^2 + a^2 = d^2$; & fiet demum $bz^2 : a = d^2 - u^2$ æquatio reducta.

402. Sint nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum.
FIG. 45. Fiet igitur ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Et quoniam habetur $x + a = u$: producendo BA uſque in D, ita, ut ſit AD $= a$; erit unaquæque DN $= x + a = u$. Sed habetur etiam $y + a = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y, qui correſpondent portionibus rectæ AB, augeantur data quantitate a: proindeque, producta CA uſque in E, ita, ut ſit AE $= a$, & acta per punctum E recta FG, ipſi AB parallela; exibunt ex punctis ipſius FG valores incognitæ z.

403. Quum autem valores iſti inſiſtere debeant ſuper valoribus alterius incognitæ y: plane

ne neceſſe eſt, ut, non jam ſuper DB, ſed ſuper FG capiantur valores ipſius u. Quare, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $bz^2 : a = d^2 - u^2$, FG linea abſciſſarum, & FD linea ordinatarum. Unde, ſi, ſumptis ſuper FG hinc inde a puncto F portionibus FG, Fg, quarum unaquæque ſit d; & ducta GH, ipſi FD parallela, talis longitudinis, ut ſit GH ad Gg, veluti eſt a ad b: deſcribatur ellipſis, cujus Gg ſit diameter, GH parameter diametri, & eadem GH referat poſitionem ordinatarum; fiet ellipſis iſta locus reductæ æquationis $bz^2 : a = d^2 - u^2$.

404. Sed eadem ellipſis erit etiam terminus loci, quo fieri debet ſatis propoſitæ æquationi $by^2 : a + 2by = c^2 - 2ax - x^2$. Ducatur namque ex puncto N, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Jamque, ſi hæc conveniat cum ellipſis diametro Gg in puncto O; fiet OM $= y + a$. Sed, propter ellipſim, OM quadratum eſt ad differentiam quadratorum FG, FO, ut eſt GH ad Gg. Itaque, quum ſit FG $= d = \sqrt{(ab + c^2 + a^2)}$, & FO $= x + a$; erit, ut $y^2 + 2ay + a^2$ ad $ab + c^2 - x^2 - 2ax$, ita a ad b: proindeque erit $by^2 : a + 2by + ab = ab + c^2 - x^2 - 2ax$, ſive $by^2 : a + 2by = c^2 - x^2 - 2ax$, quæ eſt æquatio propoſita.

III. *Ejuſdem loca ad ellipſim componendi rationis exempla magis compoſita.*

405. Quæ modo attulimus exempla, pro explicanda compoſitione locorum ad ellipſim, per reductionem æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, pau-

lo ſimpliciora fuere ; nunc alia in medium afferemus magis compoſita. Itaq; proponatur ulterius æquatio $y^2 - 2ay + 2axy : c + 2a^2x^2 : c^2 + 2bx$
* Art. 395. $= 0$, quæ, ut ſuperius* obſervavimus, reducitur ad $c^2z^2 : a^2 = d^2 - u^2$, ponendo $y - a + ax : c = z$, $x + c + bc^2 : a^2 = u$, & $2c^2 + 2bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4 = d^2$. Jamque, ſi AB ſit
FIG. 46. linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum; ſiet ipſius AB portio quælibet AN $= x$; adeoque, producta BA uſque in D, donec fuerit AD $= c + bc^2 : a^2$, erit quælibet DN $= x + c + bc^2 : a^2 = u$.

406. Quum autem habeatur $y - a + ax : c = z$; liquet, valores ipſius z non aliter haberi poſſe, niſi ſinguli valores incognitæ y augeantur quantitate variabili $ax : c$, & minuantur quantitate data a. Plane vero augebuntur valores illi quantitate variabili $ax : c$, ſi, ducta DE, ipſi AC æquidiſtanter, talis longitudinis, ut AD ſit ad DE, veluti eſt c ad a, agatur per punctum A recta EF; minuentur vero iidem valores data quantitate a, ſi, producta DE uſque in G, donec fuerit EG $= a$, ducatur per punctum G recta GH, ipſi EF parallela. Nam, ducta ex puncto quovis N, æquidiſtanter ipſi AC, recta NO, quæ conveniat cum EF in R, & cum GH in O; ſiet NR $= ax : c$, & RO $= a$.

407. Hinc centrum deſcribendæ ellipſis erit punctum G, ejuſque diameter locabitur ſuper FG; quandoquidem in æquatione reducta $c^2z^2 : a^2 = d^2 - u^2$ referunt z ipſius diametri ordinatas. Et quoniam, poſito, quod AD ſit ad AE, veluti eſt c ad m, ſit quælibet diametri portio GO $= mu : c$; multum abeſt, ut ſit ſe-

ſemidiameter ejus ellipſis, & ratio parametri ad diametrum æqualis ei, quam habet a^2 ad c^2. Unde, ſi ſemidiameter vocetur q, & ratio parametri ad diametrum ſtatuatur æqualis ei, quam habet a^2 ad n^2; erit, ut z^2 ad $q^2 - m^2u^2 : c^2$, ita a^2 ad n^2, & conſequenter erit $n^2z^2 : a^2 = q^2 - m^2u^2 : c^2$, ſive etiam $c^2n^2z^2 : a^2m^2 = c^2q^2 : m^2 - u^2$.

408. Comparata autem æquatione iſta cum ipſa æquatione reducta $c^2z^2 : a^2 = d^2 - u^2$; fiet primo $c^2n^2 : a^2m^2 = c^2 : a^2$, hoc eſt $n^2 : m^2 = 1$: unde infertur $n^2 = m^2$; & ſecundo $c^2q^2 : m^2 = d^2$: unde cruitur $q = dm : c$: proindeque ſemidiameter deſcribendæ ellipſis erit $dm : c$, & ratio parametri ad diametrum erit æqualis ei, quam habet a^2 ad m^2. Capiantur itaque ſuper GH hinc inde a puncto G portiones GH, Gb, ita, ut ſit, tam GH, quam G$b = dm : c$; ducaturque, ipſi AC æquidiſtanter, recta HK talis longitudinis, ut HK ſit ad Hb, veluti eſt a^2 ad m^2. Et, ſicuti Hb fiet diameter ellipſis deſcribendæ, ita deſignabit HK, tum parametrum hujus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum.

409. Neque vero difficile erit oſtendere, quod per hujuſmodi ellipſim fit ſatis propoſitæ æquationi $y^2 - 2ay + 2axy : c + 2a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$. Producta enim NO uſque donec ellipſi occurrat in M, poſitaque NM $= y$, fiet MO $= y - a + ax : c$. Quum autem habeatur $u = x + c + bc^2 : a^2$, ſitque portio GO $= mu : c$; erit, per ſubſtitutionem, eadem GO $= mx : c + m + bcm : a^2$. Unde, quum, propter ellipſim, MO quadratum ſit ad differentiam quadratorum GH, GO, veluti eſt HK ad Hb; erit, ut $y^2 -$

$2ay + a^2 + 2axy : c - 2a^2x : c + a^2x^2 : c^2$ ad $d^2m^2 : c^2 - m^2x^2 : c^2 - 2m^2x : c - m^2 - 2bm^2x : a^2 - 2bcm^2 : a^2 - b^2c^2m^2 : a^4$, ita a^2 ad m^2 : proindeque erit $y^2 - 2ay + a^2 + 2axy : c - 2a^2x : c + a^2x^2 : c^2 = a^2d^2 : c^2 - a^2x^2 : c^2 - 2a^2x : c - a^2 - 2bx - 2bc - b^2c^2 : a^2$, quæ reducitur ad $y^2 - 2ay + 2axy : c + 2a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$, ponendo loco d^2 valorem ejus $2c^2 + 2bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4$.

410. Proponatur quoque conſtruenda æquatio $y^2 - 2xy + 9x^2 = 2ax$, quæ ſimiliter locum exhibet ad ellipſim. Fiat $y - x = z$. Quumque habeatur $y^2 - 2xy + x^2 = z^2$; erit, ſubſtitutionis ope, $z^2 + 8x^2 = 2ax$, ſive etiam $z^2 : 8 = ax : 4 - x^2$. Fiat quoque $x - a : 8 = u$. Et quoniam habetur $x^2 - ax : 4 + a^2 : 64 = u^2$, ſive $a^2 : 64 - u^2 = ax : 4 - x^2$; erit, rurſus per ſubſtitutionem, $z^2 : 8 = a^2 : 64 - u^2$, quam liquet eſſe ejuſdem formæ cum æquatione $my^2 : n = t^2 - x^2$, quæ exhibet in ellipſi formulam, omnium ſimpliciſſimam.

411. Sint nunc, pro æquatione propoſita, FIG. 47. AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit ergo ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Quumque habeatur $x - a : 8 = u$: abſcindendo ex AB portionem AD $= a : 8$, erit unaquæq; reliquarum portionum DN $= x - a : 8 = u$. Jam vero habetur quoque $y - x = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y minuantur quantitate variabili x: quod quidem fiet, ſi, ducta ipſi AC æquidiſtanter recta DE, alteri AD æquali, agatur per punctum E recta AF. Nam, ſi ex aliquo punctorum N, æquidiſtanter eidem AC, ducatur

re-

recta NO, quæ conveniat cum AF in O: ob æquales AD, DE, erunt etiam æquales duæ AN, NO; & conſequenter erit NO $= x$.

412. Quum autem in æquatione reducta $z^2 : 8 = a^2 : 64 - x^2$ referant z diametri ordinatas; erit punctum E centrum deſcribendæ ellipſis, ejuſque diameter locabitur ſuper AF. Et quoniam poſito, quod AD ſit ad AE, veluti eſt a ad m, ſit quælibet diametri portio EO $= mx : a$; multum abeſt, ut ſit $a : 8$ ſemidiameter ejus ellipſis, & ratio parametri ad diametrum æqualis ei, quam habet 8 ad 1. Unde, ſi diameter vocetur q, & ratio parametri ad diametrum ſtatuatur æqualis ei, quam habet a ad n: erit, ut z^2 ad $q^2 - m^2x^2 : a^2$, ita a ad n: proindeque erit $nz^2 : a = q^2 - m^2x^2 : a^2$, ſive etiam $anz^2 : m^2 = a^2q^2 : m^2 - x^2$.

413. Hinc, comparata æquatione iſta cum ipſa æquatione reducta $z^2 : 8 = a^2 : 64 - x^2$, fiet primo $an : m^2 = 1 : 8$: unde infertur $n = m^2 : 8a$; & ſecundo $a^2q^2 : m^2 = a^2 : 64$: unde eruitur $q = m : 8$: proindeque ſemidiameter deſcribendæ ellipſis erit $m : 8$, & ratio parametri ad diametrum erit æqualis ei, quam habet a ad $m^2 : 8a$, ſive etiam $8a^2$ ad m^2. Capiantur itaque ſuper AF hinc inde a puncto E portiones EF, Ef, ita, ut ſit tam EF, quam E$f = m : 8$; ducaturque, ipſi AC æquidiſtanter, recta FG talis longitudinis, ut FG ſit ad Ff, veluti eſt $8a^2$ ad m^2. Et, ſicuti Ff fiet diameter ellipſis deſcribendæ, ita deſignabit FG, tum parametrum hujus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum.

414. Nec ſane arduum erit oſtendere, quod per hujuſmodi ellipſim ſit ſatis propoſitæ æqua-

tioni $y^2-2xy+9x^2=2ax$. Producta enim NO, uſque donec ellipſi occurrat in M, poſitaque NM $=y$, fiet MO $=y-x$. Quum autem habeatur $u=x-a:8$, ſitque portio EO $=mu:a$; erit, per ſubſtitutionem, eadem EO $=mx:a-m:8$. Unde, quum, propter ellipſim, MO quadratum ſit ad differentiam quadratorum EF, EO, veluti eſt FG ad Ff; erit, ut $y^2-2xy+x^2$ ad $m^2x:4a-m^2x^2:a^2$, ita $8a^2$ ad m^2: proindeque erit $y^2-2xy+x^2=2ax-8x^2$, ſive etiam $y^2-2xy+9x^2=2ax$, quæ eſt æquatio propoſita.

IV. *Compoſitio locorum ad ellipſim per formulam, omnium maxime compoſitam.*

415. Tradita ratione componendi loca ad ellipſim, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam; videamus modo, quo pacto eadem loca ad ellipſim conſtrui debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita: quem in finem, qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

416. Nimirum, referendo ellipſis puncta omnia ad rectam, poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ: perſpicuum eſt; tria contingere poſſe. Primo nempe, ut recta, poſitione data, ſit ipſa illa diameter. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula ellipſis, omnium

mnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

417. Sit igitur G centrum ellipſis, & Hb aliqua ejus diameter; ſitque etiam HK recta, quæ exhibet, tum parametrum illius diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Agatur deinde AE, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quodvis D; &, ductis rectis AF, DE, ipſi HK parallelis, & convenientibus cum aliis Hb, AE in punctis F, & E, ponatur AD $= n$, DE $= m$, AE $= s$, GH, vel $Gb = t$, HK $= p$, AF $= q$, & GF $= r$. Capiatur porro in ellipſi punctum aliquod M; ex quo quidem demittatur ad diametrum Hb ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AE in R; ponaturque AN $= x$, & MN $= y$. FIG. 43.

418. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AD ad DE; erit NR $= mx : n$; adeoque, ob æquales RO, AF, erit MO $= y + mx : n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ſive FO, ut AD ad AE; erit FO $= sx : n$; & conſequenter GO $= r + sx : n$. Eſt autem, propter ellipſim, ut MO quadratum ad differentiam quadratorum GH, GO, ita HK ad Hb. Itaque erit, ut $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + 2mqx : n + q^2$ ad $t^2 - r^2 - 2rsx : n - s^2x^2 : n^2$, ita p ad $2t$: proindeque erit $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + 2mqx : n + q^2 = pt : 2 - pr^2 : 2t - prsx : nt - ps^2x^2 : 2n^2t$, ſive etiam $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t + ps^2)x^2 : 2n^2t + 2qy + (2mqt + prs)x : nt + (q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t) = 0$.

419. Hæc igitur eſt æquatio, quæ exhibet nobis formulam ellipſis, omnium maxime compo-

poſitam. Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formula, ubi quadratum y^2 omni coefficiente denudatum reperitur, coefficientem alterius quadrati x^2 debere minui nonnihil, quo priores tres termini $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t + ps^2)x^2 : 2n^2t$ conſtituere queant quadratum perfectum; nec, deficiente termino $2mxy : n$, deficere quoque debere terminum alterum, in quo quadratum x^2 continetur. Unde veritas regulæ, ſuperius * traditæ, pro cognoſcendis locis ad ellipſim, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

*Art. 392. 394.

420. Qua porro ratione, ope inventæ formulæ generalis, loca ad ellipſim conſtruantur; haud arduum erit intelligere. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ, danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Quod ſi vero earum aliqua oriatur negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

421. Quantitates porro, quæ locum determinant, ſunt m, n, p, q, r, s, t. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum p, q, r, t valores innoteſcunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum; & tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

422. Determinatis valoribus ipſarum m, & n, etiam

etiam

n, etiam quantitatis s valor innoteſcet. In triangulo enim DAE notus eſt angulus ADE, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AD, DE, deſignata per quantitates n, & m, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque tertium latus AE, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius m nullus reperitur; quandoquidem, evaneſcente DE, cadit AB ſuper AE, & puncta duo D, & E coeunt in unum.

423. Quantum ad valorem parametri p, ille numquam negativus poteſt oriri. Unde, quod in compoſitione locorum ad parabolam obſervavimus, nequit hic locum habere. Potius valor ſemidiametri t oriri poteſt quandoque imaginarius. Et, quum id contingit, indicio nobis eſſe debet quæſitum locum contradictionem involvere. Nec reticebimus, ejuſdem ſemidiametri valorem poſſe etiam interdum nihilo æqualem reperiri; & eo in caſu optata ellipſis ad ſimplex punctum reducetur.

V. *Præcedens loca ad ellipſim componendi ratio, exemplis illuſtrata.*

424. UT exemplis notior evadat præcedens loca ad ellipſim componendi ratio, proponatur primum conſtruenda æquatio $y^2 - 2ay + ax^2 : c - ac = 0$, cui non aliter, quam per ellipſim, fieri debet ſatis. Quia in ea deeſt terminus xy; utique fractio $2m : n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit,

$m =$

* art. 422. $m = 0$; per ea, quæ paulo ante * notata ſunt, erit $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $y^2 + px^2 : 2t + 2qy + prx : t + (q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t) = 0$.

425. Jam, inſtituta comparatione, habebitur $p : 2t = a : c$, $2q = -2a$, $pr : t = 0$, & $q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t = -ac$. Ex his autem, ſicuti eruitur $q = -a$, $r = 0$, & $pt = 2a^2 + 2ac$; ita, quum ſit $p : 2t = a : c$, erit $p = 2at : c$, atque adeo $pt = 2at^2 : c$. Unde, æquatis inter ſe duobus valoribus ejuſdem pt, fiet $2at^2 : c = 2a^2 + 2ac$, hoc eſt $t^2 = ac + c^2$. & conſequenter $t = \sqrt{(ac + c^2)}$. Erat autem $p = 2at : c$. Itaque, poſito loco t valore ejus, fiet $p = 2a\sqrt{(ac + c^2)} : c$; & propterea, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus quæſitus in hunc modum.

FIG. 49.

426. Abſcindatur ex AC portio AF $= a$ Tum, ducta FH, ipſi AB parallela, capiantur ſuper ea hinc inde a puncto F portiones FH.Fb talis quidem longitudinis, ut ſit, tam FH, quam Fb $= \sqrt{(ac + c^2)}$. Agatur poſtea, æquidiſtanter ipſi AC, recta HK $= 2a\sqrt{(ac + c^2)} : c$. Jamque, ſi ellipſis deſcribatur, cujus Hb ſit diameter, HK parameter diametri, & eadem HK referat poſitionem ſuarum ordinatarum; erit ellipſis iſta terminus loci quæſiti.

427. Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur, uſque donec ipſi AB occurrat in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$; erit, ex conſtructione, MO $= y - a$. Sed, propter ellipſim, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum FH, FO, veluti eſt HK ad Hb. Quare erit, ut

y^2

$y^2 - 2ay + a^2$ ad $ac + c^2 - x^2$, ita $2a\surd(ac + c^2) : c$ ad $2\surd(ac + c^2)$, ſive, ita a ad c. Unde fiet $y^2 - 2ay + a^2 = a^2 + ac - ax^2 : c$, hoc eſt $y^2 - 2ay + ax^2 : c - ac = 0$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

428. Oporteat etiam, conſtruere æquationem $y^2 - 2axy : c + 2a^2x^2 : c^2 - 2by + a^2 = 0$, quæ ſimiliter locum exhibet ad ellipſim. Quia hic adeſt terminus xy; inſtituta comparatione, habebitur primo $2m : n = -2a : c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $2m = -2a$, ſive $m = -a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $(2m^2t + ps^2) : 2n^2t = 2a^2 : c^2$, $2q = -2b$, $(2mqt + prs) : nt = 0$, & $q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t = a^2$: quæ, per debitas ſubſtitutiones, dabunt $p = 2a^2t : s^2$, $q = -b$, $r = -bs : a$, & $t^2 = 2b^2s^2 : a^2 - s^2$.

429. Hinc, ſicuti, per extractionem quadratæ radicis, fit $t = \surd(2b^2s^2 : a^2 - s^2)$; ita, quum ſit $p = 2a^2t : s^2$, erit, ſubſtitutionis ope, $p = 2a^2\surd(2b^2s^2 : a^2 - s^2) : s^2$. Unde, niſi ſit $2b^2$ major, quam a^2, valores ipſarum p, & t, vel nulli, vel imaginarii prodibunt. Ponamus ergo $2b^2$ majorem eſſe, quam a^2; ita, ut p, & t valores habeant reales. Et, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus, de quo agitur, in hunc, qui ſequitur, modum. FIG. 50.

430. Capiatur in AB portio AD $= c$; &, ducta DE $= a$, parallela quidem ipſi AC, ſed ad plagam oppoſitam ei, verſus quam tendit in figura formulæ, jungatur AE. Abſcindatur deinde ex AC portio AF $= b$, perque punctum F agatur recta FH, parallela ipſi AE, ſuper qua-

ad

ad plagam ſimiliter contrariam capiatur FG $= bs : a$. Denique, poſitis GH, ſive G$b = \surd(2b^2s^2 : a^2 - s^2)$, & HK $= 2a^2\surd(2b^2s^2 : a^2 - s^2) : s^2$, deſcribatur ellipſis, cujus Hb ſit diameter, HK parameter diametri, & eadem HK deſignet poſitionem ſuarum ordinatarum. Jamque ellipſis iſta fiet terminus loci quæſiti.

431. Ducatur namque ex aliquo ejus puncto M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipſis AB, AE in N, & R. Quia ergo AD eſt ad DE, ut AN ad NR; erit NR $= ax : c$. Quumque etiam AD ſit ad AE, ut AN ad AR, ſive FO; erit FO $= sx : c$. Unde fiet MO $= y - ax : c - b$, & GO $= sx : c - bs : a$. Eſt autem, propter ellipſim, ut MO quadratum ad differentiam quadratorum GH, GQ, ita HK ad Hb. Itaque erit, ut $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 - 2by + 2abx : c + b^2$ ad $b^2s^2 : c^2 - s^2 + 2bs^2x : ac - s^2x^2 : c^2$, ita $2a^2\surd(2b^2s^2 : a^2 - s^2) : s^2$ ad $2\surd(2b^2s^2 : a^2 - s^2)$, ſive, ita a^2 ad s^2. Unde eruitur $y^2 - 2axy : c + 2a^2x^2 : c^2 - 2by + a^2 = 0$, quæ eſt æquatio propoſita.

432. In allato igitur exemplo, ut valor ſemidiametri t realis evadat, neceſſe eſt, ut $2b^2$ major ſit, quam a^2. Sed, ſi fuerit $2b^2$ minor, quam a^2, tunc ejuſdem ſemidiametri valor prodibit imaginarius; adeoque ipſe locus conſtruendus contradictionem aliquam involvet. Nec ſane aliter ſe res habet. Si enim in æquatione propoſita quæratur valor ordinatæ y; habebitur, vel $y = ax : c + b + \surd(b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2 - a^2)$, vel $y = ax : c + b - \surd(b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2 - a^2)$. Plane vero uterque horum valorum non aliter realis eſſe poteſt, niſi quanti-

tas

tas $b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2 - a^2$, vel nulla ſit, vel realis, & poſitiva.

433. Talis autem eſſe non poteſt, ubi $2b^2$ minor eſt, quam a^2. Ponatur enim $2b^2 + f^2 = a^2$; & quantitas illa, ſubſtitutionis ope, fiet $- b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2 - f^2$, quam, velut compoſitam ex duobus quadratis negativis, liquet, eſſe ſemper realem, & negativam. Sed non perinde res eſt, quum $2b^2$ major eſt, quam a^2. Tunc enim poni debet $2b^2 - f^2 = a^2$; adeoque, per ſubſtitutionem eadem illa quantitas vertetur in hanc aliam $- b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2 + f^2$, quæ etſi componatur ex duobus quadratis, attamen horum quadratorum unum quidem eſt negativum, alterum poſitivum.

434. Cæterùm, ſi fuerit $2b^2 = a^2$, tunc evaneſcet valor ſemidiametri t; atque adeo ipſa ellipſis deſcribenda in centro G tota coacervabitur. Quod neque etiam mirum videri debet. Nam, etſi in iſto caſu quantitas $b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2 - a^2$ fiat $- b^2 + 2abx : c - a^2x^2 : c^2$, quæ negativa deprehenditur, ubi nulla non eſt; attamen, ſi ponatur $x = - bc : a$ prorſus evaneſcet: proindeque valor ordinatæ y ſaltem in hoc caſu non erit imaginarius. Quia vero in hac hypotheſi evaneſcit etiam valor ipſius ordinatæ y; hinc eſt, ut exiſtente $2b^2 = a^2$ ellipſis tota in centro colligatur.

VI. *Monitum circa compoſitionem locorum ad ellipſim.*

435. QUemadmodum in æquationibus localibus, quæ ad ellipſim nos du-

ducunt, aſſumpſimus ſemper x, & y pro duabus earum incognitis; ita in earundem compoſitione illud perpetuo curavimus, ut abſciſſæ quidem AN, capiendæ ſuper AB, deſignarent valores incognitæ x; ordinatæ vero NM, ducendæ æquidiſtanter alteri AC, repræſentarent valores alterius incognitæ y.

436. Sed notari hic ſedulo debet, quod, exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poteſt, ut deſignari dabeant per abſciſſas quidem AN valores incognitæ y, per ordinatas vero NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane, in utraque loca componendi ratione, difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

437. Nimirum, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, fieri id debet, quotieſcumque in æquatione reducta per fractionem aliquam multiplicatum reperitur, non jam quadratum, ſive incognitæ y, ſive ejus, quæ ex ipſa dependet; ſed quadratum, vel alterius incognitæ x, vel ejus, quæ ex hac alia proficiſcitur.

438. Sic æquatio $mx^2 : n - 2mx = 2ay - y^2$ mutationem illam expoſcit. Nam, faciendo $x - n = u$, $a - y = z$, & $a^2 + mn = d^2$; habetur loco ejus hæc alia $mu^2 : n = d^2 - z^2$: in qua per fractionem $m : n$ multiplicatum reperitur quadratum incognitæ u, quæ dependet, non quidem ex y, ſed ex x; quum ex hypotheſi habeatur $x - n = u$.

439. Quotieſcumque vero conſtruitur locus per reductionem æquationis ad formulam, omnium maxime compoſitam, illud idem fieri debet,

bet, quando in æquatione conſtruenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic ſequens æquatio $x^2 - 2axy : c + 2a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$ exigit quoque eam variationem; quia quadratum incognitæ x illud eſt, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

440. Interim, quum æquatio, quæ ad ellipſim nos ducit, conſtruitur per reductionem ejus ad formulam, omnium maxime compoſitam, eademque natura ſua mutationem illam expoſcit, debent etiam in formula incognitæ permutari: adeo nempe, ut ſcribere oportebit, incognitam x loco alterius y, & viciſſim incognitam y loco alterius x.

441. Ita æquatio $x^2 - 2axy : c + 2a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$, ob quadratum x^2 omni prorſus fractione denudatum, exigit eam mutationem. Plane vero formula, cum qua comparanda eſt illiuſmodi æquatio, haud quidem eſſe debet $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t + ps^2)x^2 : 2n^2t + 2qy + (2mqt + prs)x : nt + (q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t) = 0$, ſed $x^2 + 2mxy : n + (2m^2t + ps^2)y^2 : 2n^2t + 2qx + (2mqt + prs)y : nt + (q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t) = 0$.

442. Fatendum eſt tamen, variationem iſtam non eſſe abſolute neceſſariam. Nam, in priore exemplo * $mx^2 : n - 2mx = 2ay - y^2$, etſi, *art. 438. faciendo $x - n = u$, $a - y = z$, & $a^2 + mn = d^2$, habeatur $mu^2 : n = d^2 - z^2$; multiplicando tamen omnes æquationis terminos per n, eoſdemque dividendo per m, fiet $u^2 = nd^2 : m - nz^2 : m$, ſive etiam $nz^2 : m = nd^2 : m - u^2$: ubi per fractionem $n : m$ multiplicatum reperi-

 tur

tur quadratum incognitæ z, quæ quidem ex y trahit originem ſuam; quum ſit $a - y = z$.

443. Atque ita quoque in ſecundo exemplo *, etſi æquatio ſit $x^2 - 2axy : c + 2a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$; multiplicatis tamen terminis omnibus per c^2, iiſdemque diviſis per $2a^2$, habebitur $c^2x^2 : 2a^2 - cxy : a + y^2 - c^2x : a - bc^2y : a^2 + c^4 : 2a^2 = 0$: ubi, non amplius quadratum incognitæ x, ſed quadratum alterius incognitæ y omni vacat fractione.

* art. 439.

444. Perſpicuum eſt autem, hoc idem præſtari poſſe in omnibus æquationibus, quæ ad ellipſim nos ducunt. Neque enim in parabola aliunde evenit, ut nequeat illud ſemper obtineri, quam quia fieri poteſt, ut in æquatione ad parabolam deficiat quandoque quadratum y^2. Plane vero æquatio, quæ natura ſua ad ellipſim nos ducit, omnino utriuſque incognitæ quadratum debet continere.

445. Præparata igitur æquatione, ſive propoſita, ſive reducta, per vulgatas operationes, & exiſtentibus x, & y duabus ejuſdem æquationis incognitis; licebit ſemper deſignare, per abſciſſas quidem AN valores incognitæ x, per ordinatas vero NM valores alterius incognitæ y: tumque demum quandoque opus erit variatione illa, de qua eſt quæſtio, quotieſcumque, ſive reductam, ſive propoſitam æquationem abſque ulla præparatione conſtruere velimus.

446. Non eſt interim hoc loco reticendum, dari poſſe æquationes nonnullas, quæ etiam abſque præparatione utroque modo conſtrui poſſunt. Contingit id autem, quum in æquatione utriuſque incognitæ quadratum omni vacat fractio.

ctione; veluti eſt æquatio iſta $y^2 + 2ay = 2bx - x^2$, vel etiam hæc alia $y^2 + 2xy : 3 + x^2 - 2ay - 2bx = 0$. Et ex iis, quæ mox dicenda erunt, hujus formæ eſſe debent æquationes, quæ non tam ad ellipſim, quam ad circuli circumferentiam quandoque nos ducunt.

VI. *Compoſitio locorum ad circuli circumferentiam, & quomodo dignoſcuntur.*

447. Quantum ad compoſitionem locorum, quæ circuli circumferentia terminantur, ea fieri debet perinde ac, ſi loca ipſa eſſent ad ellipſim; quum revera circulus velut ſpecies quædam ellipſis debeat haberi. Innoteſcet autem, locum eſſe ad circulum, quotieſcumque, conſtructo loco, parameter ſit æqualis diametro, ad quam refertur, itemque ordinatæ rectos cum diametro angulos conſtituunt; quum non aliter ellipſis in circulum abire queat, quam ubi duo iſta contingunt.

448. Proponatur, exempli gratia, conſtruenda æquatio $y^2 - 2ay = 2bx - x^2$, quæ ad elpſim nos ducit; & paragenda ſit ejus conſtructio, per reductionem ad formulam, omnium ſimpliciſſimam. Fiat, tum $y - a = z$, cum $b - x = u$. Et quoniam habetur $y^2 - 2ay = z^2 - a^2$, & $2bx - x^2 = b^2 - u^2$; erit, per ſubſtitutionem, $z^2 - a^2 = b^2 - u^2$, ſive etiam $z^2 = a^2 + b^2 - u^2$. Ponatur quoque $a^2 + b^2 = d^2$; & erit $z^2 = d^2 - u^2$ æquatio reducta.

449. Sint jam, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Habita ergo ſuæ reductionis ratione, conſtruetur FIG. 51.

 ea-

eadem in hunc modum. Abſcindatur primo, tum ex AB portio AD $= b$, cum ex AC portio AE $= a$. Deinde, completo parallelogrammo AF, capiantur ſuper EG hinc inde a puncto F portiones FG, Fg, ita, ut ſit, tam FG, quam Fg $= \surd(a^2 + b^2)$. Denique, ducta GH, parallela quidem ipſi AC, & æquali alteri Gg, deſcribatur ellipſis, cujus Gg ſit diameter, GH parameter diametri, & eadem GH referat poſitionem ſuarum ordinatarum.

450. Hujuſmodi igitur ellipſi terminabitur locus, quo fieri debet ſatis propoſitæ æquationi. Plane vero in hac ellipſi inventa eſt parameter GH æqualis diametro Gg, ad quam refertur. Unde, ſi ordinatæ ejuſdem diametri rectos cum ipſa angulos conſtituant; jam ellipſis vertetur in circulum: & ea propter, ſicuti locus dicendus erit ad circulum, & non ad ellipſim; ita componetur idem locus, ſi reliquis, ut antea *, peractis, centro F, & intervallo ipſius FG, ſive Fg circuli circumferentia deſcribatur.

* *Art.* 449.

451. Oporteat etiam conſtruere æquationem $y^2 + 2xy : 3 + x^2 - 2ay - 2bx = 0$, quæ ſimiliter ad ellipſim nos ducit; & perficienda ſit ejus conſtructio, adhibita formula, omnium maxime compoſita $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t + ps^2)x^2 : 2n^2t + 2qy + (2mqt + prs)x : nt + (q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t) = 0$. Sane, comparatione inſtituta, habebitur $2m : n = 2 : 3$, ſive $m : n = 1 : 3$. Quare, aſſumpta $n = a$, fiet $m = a : 3$. Comparatis vero terminis reliquis, habebitur quoque $(2m^2t + ps^2) : 2n^2t = 1$, $2q = -2a$, $(2mqt + prs) : nt = -2b$, & $q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t = 0$.

Hinc

452. Hinc autem, per debitas ſubſtitutiones, eruitur primo $p = 16a^2t : 9s^2$, ſecundo $q = -a$, tertio $r = (3a - 9b)s : 8a$, ac denique $t^2 = (81a^2 - 54ab + 81b^2)s^2 : 64a^2$. Unde, ſicuti, per extractionem quadratæ radicis, fit $t = (s : 8a)\surd(81a^2 - 54ab + 81b^2)$; ita, quum ſit $p = 16a^2t : 9s^2$; erit, ſubſtitutionis ope, $p = (2a : 9s)\surd(81a^2 - 54ab + 81b^2)$: & propterea, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus, de quo agitur, in hunc, qui ſequitur, modum. FIG. 51.

453. Capiatur in AB portio AD $= a$; tum, ducta ad eandem, verſus quam tendit in figura formulæ, plagam ipſi AC æquidiſtanter, recta DE $= a : 3$, jungatur AE. Abſcindatur deinde ex AC portio AF $= a$, perque punctum F agatur recta FH, parallela ipſi AE, ſuper qua capiatur FG $= (3a - 9b)s : 8a$, ſurſum verſus, ſi valor iſte ſit poſitivus, & deorſum verſus, ſi viciſſim ſit negativus. Denique, poſitis GH, ſive G$h = (s : 8a)\surd(81a^2 - 54ab + 81b^2)$, & HK $= (2a : 9s)\surd(81a^2 - 54ab + 81b^2)$, deſcribatur ellipſis, cujus Hh ſit diameter, HK parameter diametri, & eadem HK deſignet poſitionem ſuarum ordinatarum.

454. Jam, ſi fuerit $s = 2a\surd 2 : 3$, evadet, tum parameter HK æqualis diametro Hh, cum rectus angulus AED, ſive GOM, quem ordinatæ cum diametro conſtituunt: proindeque ellipſis ipſa in circulum vertetur. Nam, exiſtente $s = 2a\surd 2 : 3$, erit pariter $s^2 = 8a^2 : 9$; adeoque, quum ſit $p = 16a^2t : 9s^2$, erit $p = 2t$, hoc eſt parameter HK æqualis diametro Hh. Et deinde, ſemper ac habetur $s^2 = 8a^2 : 9$, erit

 quo-

quoque $s^2 + a^2 : 9 = a^2$. Eſt autem $s^2 + a^2 : 9$ ſumma quadratorum, quæ fiunt ex ipſis AE, DE; eſtque etiam a^2 quadratum ex AD. Itaque quadrata duo AE, DE erunt ſimul æqualia quadrato, quod fit ex AD: & propterea angulus AED rectus erit.

455. Cæterum utroque exemplo abunde liquet veritas ejus, quod paulo ante * dictum eſt: nimirum, quod non aliter fieri poteſt locus circulo, niſi in æquatione conſtruenda utriuſque incognitæ quadratum omni omnino fractione ſit denudatum. Generaliter autem id demonſtrare licebit per ipſam ellipſis formulam generalem $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t + ps^2)x^2 : 2n^2t + 2qy + (2mqt + prs)x : nt + (q^2 - pt : 2 + pr^2 : 2t) = 0$; quippe quæ exhibet nobis quadrata incognitarum x, & y omni fractione denudata, quotieſcumque ellipſis ipſa in circulum abire ſupponitur.

* Art. 446.

456. Neque enim aliter ellipſis in circulum abire poteſt, niſi ſit; primo parameter HK æqualis diametro Hb; hoc eſt $p = 2t$; & ſecundo rectus angulus GOM, ſive AED, hoc eſt $s^2 + m^2 = n^2$. Plane vero, ſicuti formula illa generalis, ponendo $2t$ loco p, evadit $y^2 + 2mxy : n + (s^2 + m^2)x^2 : n^2 + 2qy + (2mq + 2rs)x : n + (q^2 - t^2 + r^2) = 0$; ita, ſcribendo n^2 loco $s^2 + m^2$, eadem illa formula fiet $y^2 + 2mxy : n + x^2 + 2qy + (2mq + 2rs)x : n + (q^2 - t^2 + r^2) = 0$: in qua quidem utriuſque incognitæ quadratum omni omnino fractione denudatum deprehenditur.

CA-

CAPUT IV.

Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam.

457. Reliquum jam eſt, ut compoſitionem locorum oſtendamus, quæ ad hyperbolam nos ducunt. Hujuſmodi loca duplicis ſpeciei eſſe poſſunt. Nam hyperbola, per quam terminantur, conſiderari poteſt, vel relate ad aliquam ex ſuis diametris, vel in ordine ad ſuas aſymptotos. Unde eorundem locorum compoſitionem duobus etiam capitibus complectemur; & in iſto quidem agemus de locis illis, in quibus hyperbola relate ad diametrorum aliquam conſideratur; tum capite ſequenti ea loca proſequemur, in quibus eadem hyperbola ſub contemplationem venit relate ad ſuas aſymptotos.

I. *Ratio componendi loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

458. Radituri compoſitionem locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex ſuis diametris conſideratam, oſtendemus primo loco, qua ratione fiat eorum compoſitio, adhibita formula, quæ caſum continet, omnium ſimpliciſſimum. Et in hyperbola quoque, non ſecus ac in parabola, & ellipſi, caſus ſimpliciſſimus habetur, ad calculum revocata

unius ex ſuis diametris proprietate. Quum autem in diametro hyperbolæ duo ſint vertices; hic quoque, perinde ac in ellipſi * factum eſt, præſtat, velut originem abſciſſarum aſſumere, non jam unum ex verticibus, ſed ipſius hyperbolæ centrum, a quo diameter biſecatur. Plane vero, ſi t dicatur ſemidiameter, y quælibet ordinatarum, & x abſciſſa, ordinatæ correſpondens: tum item ratio parametri ad diametrum ponatur æqualis ei, quam habet n ad m; erit, ob proprietatem diametri, ut y^2 ad $x^2 - t^2$, ita n ad m: proindeque formula, omnium ſimpliciſſima, erit $my^2 : n = x^2 - t^2$.

* ar. 389.

459. Oſtendendum eſt igitur, qua quidem ratione, ope hujus formulæ $my^2 : n = x^2 - t^2$, ipſa ad hyperbolam loca componantur, ubi relate ad aliquam ex ſuis diametris ſub contemplationem venit. Et primo quidem formulæ ipſius compoſitio nullam habet difficultatem. Eſto etenim, pro ea, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiantur ſuper AB hinc inde a puncto A portiones AD, Ad talis longitudinis, ut ſit, tam AD, quam Ad $= t$. Deinde agatur per punctum D, ipſi AC æquidiſtanter, recta DE, talem habens longitudinem, ut DE ſit ad Dd, veluti eſt n ad m. Jamque, ſi hyperbola deſcribatur, cujus Dd ſit diameter, DE parameter diametri, & eadem DE referat poſitionem ordinatarum; erit hyperbola iſta terminus loci quæſiti.

FIG. 53.

460. Capiatur enim in AB portio quævis AN, tumque per punctum N ad hyperbolam uſque ducatur, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Quia ergo, propter hyperbolam, MN quadratum eſt ad rectangulum DNd, ſive etiam ad differen-

tiam

tiam quadratorum AN, AD, ut eſt DE ad Dd; erit, ut y^2 ad $x^2 - t^2$, ita n ad m: proindeque erit $my^2 : n = x^2 - t^2$. Et quamquam, vel alterutra, vel utraque ipſarum AN, NM capiatur ad partes contrarias; adhuc tamen eadem orietur æquatio. Nam, etſi fiat in iſto caſu AN $= - x$, & NM $= - y$; ipſarum tamen quadrata erunt ſemper x^2, & y^2. Unde ſemper habebitur, ut y^2 ad $x^2 - t^2$, ita n ad m.

461. Jam, ſicuti æquatio localis, quæ eſt duarum dimenſionum, ad hyperbolam nos ducit, relate ad aliquam ex ejus diametris conſideratam, ubi eam reducere licet ad formulam illam; ita, habita ſuæ reductionis ratione, facile erit, locum componere, quo eidem æquationi debet fieri ſatis. Cujuſmodi autem eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius $my^2 : n = x^2 - t^2$, haud arduum erit definire. Primo enim, ſi in æquatione non reperiuntur incognitæ duæ ſimul multiplicatæ, reducetur ad eam formam æquatio, ubi ab utraque ejus parte exiſtunt quadrata incognitarum iiſdem ſignis affecta.

462. Proponatur, exempli gratia, æquatio $ay^2 : c - 2ay + ac = 2bx + x^2$. Fiat $x + b = u$. Et quoniam habetur $x^2 + 2bx + b^2 = u^2$, ſive $x^2 + 2bx = u^2 - b^2$; ſubſtitutione peracta, erit $ay^2 : c - 2ay + ac = u^2 - b^2$, ſive etiam $y^2 - 2cy + c^2 = cu^2 : a - b^2c : a$. Fiat quoque $y - c = z$. Quumque habeatur $y^2 - 2cy + c^2 = z^2$; erit, rurſus per ſubſtitutionem, $z^2 = cu^2 : a - b^2c : a$, ſive etiam $az^2 : c = u^2 - b^2$, quam liquet eſſe ejuſdem formæ cum æquatione $my^2 : n = x^2 - t^2$, ſimpliciſſimum hy-

hyperbolæ, relate ad unam ex ejus diametris conſideratæ, caſum exhibente.

463. Quod ſi autem in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiuſmodi æquatio formam induat iſtius $my^2 : n = x^2 - t^2$, oportebit, utriuſque incognitæ quadratum ita quidem in ea contineri, ut, tranſlatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, & liberato quadratorum uno ab omni coefficiente, debeat coefficiens alterius quadrati augeri nonnihil, quo omnes ii termini poſſint ſimul quadratum perfectum conſtituere.

464. Ita, ſi æquatio fuerit $y^2 - 2ay + 4axy : c + 3a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$; ponendo $y - a + 2ax : c = z$; erit $y^2 - 2ay + 4axy : c + 3a^2x^2 : c^2 = z^2 + 4a^2x : c - a^2 - a^2x^2 : c^2$. Quare, ſubſtitutionis ope, fiet $z^2 + 4a^2x : c - a^2 - a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$, ſive etiam $c^2z^2 : a^2 + 4cx - c^2 - x^2 + 2bc^2x : a^2 = 0$. Hinc, ponendo quoque $x - 2c - bc^2 : a^2 = u$, erit $4cx + 2bc^2x : a^2 - x^2 = 4c^2 + 4bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4 - u^2$; adeoque, rurſus per ſubſtitutionem, fiet $c^2z^2 : a^2 + 3c^2 + 4bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4 - u^2 = 0$. Et faciendo adhuc $3c^2 + 4bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4 = d^2$, erit demum $c^2z^2 : a^2 + d^2 - u^2 = 0$, ſive $c^2z^2 : a^2 = u^2 - d^2$.

465. Cæterum diameter, ad quam hyperbola refertur, ubi æquatio conſtruenda formam induit hujus $my^2 : n = x^2 - t^2$, eſt ex numero earum, quas primas appellavimus. Sed fieri quandoque poteſt, ut eadem diameter ex prima evadat ſecunda; ſcilicet, quum conſtruenda

ida æquatio ſubit formam iſtius $my^2 : n = x^2 + r^2$. Nam, quum æquatio iſta, ad proportionem revocata, det, ut y^2 ad $x^2 + r^2$, ita n ad m; erit, ut parameter ad diametrum, ita quadratum ordinatæ ad ſummam quadratorum, quæ fiunt ex ſemidiametro, & portione ejus, ordinata, & centro comprehenſa: quam ſane proprietatem diametris ſecundis hyperbolarum competere, jam ſuperius * fuit obſervatum. *art. 202.

466. Sicuti autem deſcribitur hyperbola in plano, data aliqua ejus diametro prima cum parametro hujus diametri, & poſitione ſuarum ordinatarum; ita deſcribere eandem licebit, ubi datur aliqua ejus diameter ſecunda cum parametro alterius hujus diametri, & poſitione ordinatarum iſtius. Nam, ſi per centrum deſcribendæ hyperbolæ, æquidiſtanter ordinatis datæ diametri, recta ducatur, quæ, biſecta in eodem centro, ſit media proportionalis inter datam diametrum, & ejus parametrum; hæc erit ejuſdem hyperbolæ una ex diametris primis. Et, ſicuti, ejus ordinatæ debent eſſe parallelæ datæ diametro; ita ejuſdem parameter habebitur, inveniendo poſt eam, & diametrum datam tertiam proportionalem.

II. *Præcedentis loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, componendi rationis exempla ſimpliciora.*

467. UT exemplis oſtendamus, qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, componantur loca ad hyperbolam, conſideratam

tam relate ad aliquam ex ejus diametris, proponatur primum conſtruenda æquatio $ay^2 : c - 2ay + ac = 2bx + x^2$, quæ, ut vidimus paulo
*art.462. ante *, reducitur ad $az^2 : c = u^2 - b^2$, ponendo $x + b = u$, & $y - c = z$. Jamque, ſi AB ſit linea abſciſſarum, & AC linea ordinata-
FIG. 54. rum; fiet ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Unde, quum habeatur $x + b = u$: producendo BA verſus D, uſque donec fuerit AD $= b$; erit unaquæque ipſarum DN $= x + b = u$.

468. Quia vero habetur quoque $y - c = z$; liquet, valores incognitæ z non aliter haberi poſſe, niſi ſinguli valores ipſius y minuantur data quantitate c. Quare, quum valores incognitæ y correſpondeant portionibus rectæ AB, quæ referunt valores alterius incognitæ x; perſpicuum eſt, quod, abſciſſa ex AC portione AE$=c$, & ducta per punctum E recta EG, ipſi AB parallela, exire debent ex punctis ipſius EG valores incognitæ z. Quumque valores iſti inſiſtant oportet ſuper valoribus alterius incognitæ u: plane neceſſe eſt, ut, non jam ſuper recta DB, ſed ſuper recta EG, quæ ei eſt parallela, valores capiantur ipſius u.

469. Hinc, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $az^2 : c = u^2 - b^2$, FG linea abſciſſarum, & DF linea ordinatarum. Quare, ſi ſumptis ſuper FG hinc inde a puncto F portionibus FE, Fe, quarum unaquæque ſit æqualis qnantitati b, abſciſſaque ex EC portione EH, talis longitudinis, ut ſit EH ad Ee, veluti eſt c ad a; deſcribatur hyperbola, cujus Ee ſit diameter, EH parameter diametri, & eadem EH referat poſitionem ordinatarum: fiet hyper-

bo-

bola iſta locus ejus reductæ æquationis $az^2 : c = u^2 - b^2$.

470. Sed eadem hyperbola terminabitur quoque locus propoſitæ æquationis $ay^2 : c - 2ay + ac = 2bx + x^2$. Ducatur namq;ex puncto N, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Jamque, ſi hæc conveniat cum hyperbolæ diametro Ee in puncto O, fiet OM $= y - c$. Eſt autem, propter hyperbolam, ut OM quadratum ad differentiam quadratorum FO, FE ita EH ad Ee. Quare, quum ſit FO $= b + x$, & FE $= b$;erit, ut $y^2 - 2cy + c^2$ ad $2bx + x^2$, ita c ad a:proindeque erit,$ay^2 : c - 2ay + ac = 2bx + x^2$, quæ eſt æquatio propoſita.

471. Verum quidem eſt, demonſtrationem, a nobis allatam, obtinere dumtaxat relate ad eam hyperbolæ portionem, contentam in angulo, quem ſemidiameter FE, ulterius producta in G, conſtituit cum EH. Sed facile erit, eandem extendere ad omnes alias hyperbolæ portiones: modo habeatur ratio ſitus rectarum, quibus pro inventione æquationis opus eſt: ut hinc nullum erit punctum in hyperbola, per quod propoſitæ æquationi non poſſit fieri ſatis. Id vero etiam in ſequentibus exemplis obſervandum eſt; & ſufficiat, ſemel illud adnotaſſe, ne ſæpius eandem rem repetere cogamur.

472. Proponatur ſecundo æquatio $by^2 : a + 2by - c^2 + ab = x^2 - 2ax$, quæ ſimiliter ad hyperbolam, conſideratam relate ad aliquam ex ejus diametris, nos ducit. Fiat primo $x - a = u$. Et quoniam habetur $x^2 - 2ax = u^2 - a^2$; erit, per ſubſtitutionem, $by^2 : a + 2by - c^2 + ab = u^2 - a^2$, ſive $y^2 + 2ay - ac^2 : b + a^2 = au^2 : b - a^3$

$- a^3 : b$. Fiat quoque $y + a = z$. Quumque habeatur $y^2 + 2ay + a^2 = z^2$; erit, rurſus ſubſtitutionis ope, $z^2 - ac^2 : b = au^2 : b - a^3 : b$, ſive $bz^2 : a = u^2 - a^2 + c^2$. Ponatur denique $a^2 - c^2 = d^2$; & fiet demum $bz^2 : a = u^2 - d^2$ æquatio reducta.

FIG. 55. 473. Sint nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Fiet igitur ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Et quoniam habetur $x - a = u$: abſcindendo ex AB portionem AD $= a$, & capiendo unamquamque ipſarum AN majorem, quam AD; erit reliquarum quælibet DN $= x - a = u$. Sed habetur etiam $y + a = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y augeantur data quantitate a: proindeque, producta CA uſque in E, ita, ut ſit AE $= a$, & acta per punctum E recta EG, ipſi AB parallela; exibunt ex punctis ipſius EG valores incognitæ z.

474. Quum autem valores iſti inſiſtere debeant ſuper valoribus alterius incognitæ u: plane neceſſe eſt, ut non jam ſuper DB, ſed ſuper EG valores capiantur ipſius u. Quare, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $bz^2 : a = u^2 - d^2$, FG linea abſciſſarum, & FD linea ordinatarum. Unde, ſi ſumptis ſuper FG hinc inde a puncto F portionibus FG, Fg, quarum unaquæque ſit d, & ducta GH, ipſi FD parallela, talis longitudinis, ut ſit GH ad Gg, veluti eſt a ad b; deſcribatur hyperbola, cujus Hg ſit diameter, GH parameter diametri, & eadem GH referat poſitionem ordinatarum: fiet hyperbola iſta locus reductæ æquationis $bz^2 : a = u^2 - d^2$.

475.

475. Sed eadem hyperbola erit etiam terminus loci, quo fieri debet ſatis propoſitæ æquationi $by^2 : a + 2by - c^2 + ab = x^2 - 2ax$. Ducatur namque ex puncto N, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Jamque, ſi recta iſta conveniat cum hyperbolæ diametro Gg in puncto O, fiet OM $= y + a$. Sed, propter hyperbolam, OM quadratum eſt ad differentiam quadratorum FG, FO, ut eſt GH ad Gg. Itaque, quum ſit FG $= d = \sqrt{(a^2 - c^2)}$, & FO $= x - a$; erit, ut $y^2 + 2ay + a^2$ ad $x^2 - 2ax + c^2$, ita a ad b: proindeque erit $by^2 : a + 2by + ab = x^2 - 2ax + c^2$; ſive $by^2 : a + 2by - c^2 + ab = x^2 - 2ax$, quæ eſt æquatio propoſita.

476. Cæterum in hoc exemplo, ubi fecimus $a^2 - c^2 = d^2$, tacite ſuppoſuimus, a^2 majorem eſſe, quam c^2. Sed fieri poteſt, ut a^2 ſit viciſſim minor, quam c^2; & tunc, quemadmodum poni debet $c^2 - a^2 = d^2$, ita æquatio reducta erit $bz^2 : a = u^2 + d^2$: proindeque per ea, quæ ſuperius * adnotavimus, iiſdem ut prius peractis, fiet Gg diameter ſecunda hyperbolæ deſcribendæ. Hac enim ratione erit, ut GH ad Gg, ita OM quadratum ad ſummam quadratorum FG, FO. Unde, quum ſit, ut a ad b, ita $y^2 + 2ay + a^2$ ad $x^2 - 2ax + c^2$; erit rurſus ut antea $by^2 : a + 2by - c^2 + ab = x^2 - 2ax$.

* art. 465.

477. Fieri etiam poteſt, ut ſit $a^2 = c^2$; & tunc, ſicuti æquatio reducta erit $bz^2 : a = u^2$, ita hyperbola ipſa in duplicem rectam vertetur. Et ſane, ſemper ac habetur $a^2 = c^2$, æquatio, de qua agitur, $by^2 : a + 2by - c^2 + ab = x^2 - 2ax$, reducetur ad hanc aliam $by^2 : a + 2by - a^2 + ab = x^2 - 2ax$: quæ, ſicuti tranſpo-

ſitio-

ſitione evadit $by^2 : a + 2by + ab = x^2 - 2ax + a^2$, ita, multiplicatis terminis omnibus per a, fiet $b(y^2 + 2ay + a^2) = a(x^2 - 2ax + a^2)$. Unde, per extractionem quadratæ radicis, habebitur, non modo $(y + a)\sqrt{b} = (x - a)\sqrt{a}$, verum etiam $(-y - a)\sqrt{b} = (x - a)\sqrt{a}$: quarum æquationum utraque ad rectam nos ducit.

III. *Ejuſdem loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, componendi rationis exempla magis compoſita.*

478. Quæ modo attulimus exempla, pro explicanda compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, per reductionem æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, paulo ſimpliciora fuere; nunc alia in medium afferemus magis compoſita. Itaque proponatur ulterius æquatio $y^2 - 2ay + 4xy : c + 3a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$, quæ, ut ſuperius * obſervavimus, reducitur ad $c^2z^2 : a^2 = u^2 - d^2$, ponendo $y - a + 2ax : c = z$, $x - 2c - bc^2 : a^2 = u$, & $3c^2 + 4bc^2 : a^2 + b^2c^4 : a^4 = d^2$. Jamque, ſi AB ſit linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, fiet ipſius AB portio quælibet AN $= x$; adeoque, abſciſſa ex AB portione AD $= 2c + bc^2 : a^2$, erit quælibet DN $= x - 2c - bc^2 : a^2 = u$.

* art. 464.

FIG. 56.

479. Quum autem habeatur $y - a + 2ax : c = z$; liquet, valores ipſius z non aliter haberi poſſe, niſi ſinguli valores incognitæ y augeantur quantitate variabili $2ax : c$, & minuantur quantitate data a. Plane vero augebuntur valo-

lores illi quantitate variabili $2ax : c$, ſi ducta ad plagam oppoſitam DE, ipſi AC æquidiſtanter, talis longitudinis, ut AD ſit ad DE, veluti eſt c ad $2a$, agatur per punctum E recta AF; minuentur vero iidem valores data quantitate a, ſi abſciſſa ex ED, producta ſi opus, portione EG $= a$, ducatur per punctum G recta GH, ipſi EF parallela. Nam, ducta ex puncto quovis N, æquidiſtanter ipſi AC recta NO, quæ conveniat cum EF in R, & cum GH in O; fiet NR $=$ $2ax : c$; & RO $= a$.

480. Hinc centrum deſcribendæ hyperbolæ erit punctum G, ejuſque diameter locabitur ſuper GH; quandoquidem in æquatione reducta $c^2z^2 : a^2 = x^2 - d^2$ referunt z ipſius diametri ordinatas. Et quoniam, poſito, quod AD ſit ad AE, veluti eſt c ad m, fit quælibet diametri portio GO $= mx : c$; multum abeſt, ut ſit d ſemidiameter ejus hyperbolæ, & ratio parametri ad diametrum æqualis ei, quam habet a^2 ad c^2. Unde, ſi ſemidiameter vocetur q, & ratio parametri ad diametrum ſtatuatur æqualis ei, quam habet a^2 ad x^2; erit, ut z^2 ad $m^2x^2 : c^2 - q^2$, ita a^2 ad x^2; & conſequenrer erit $x^2z^2 : a^2 =$ $m^2x^2 : c^2 - q^2$, ſive etiam $c^2x^2z^2 : a^2m^2 = x^2$ $- c^2q^2 : m^2$.

481. Comparata autem æquatione iſta cum ipſa æquatione reducta $c^2z^2 : a^2 = x^2 - d^2$; fiet primo $c^2x^2 : a^2m^2 = c^2 : a^2$, hoc eſt $x^2 : m^2 = 1$: unde infertur $x^2 = m^2$; & ſecundo $c^2q^2 : m^2 =$ d^2 : unde eruitur $q = dm : c$: proindeque ſemidiameter deſcribendæ hyperbolæ erit $dm : c$, & ratio parametri ad diametrum erit æqualis ei, quam habet a^2 ad m^2. Capiantur itaque ſuper

GH hinc inde a puncto G portiones GH, Gb, ita, ut ſit, tam GH, quam G$b = dm : c$; ducatur que, ipſi AC æquidiſtanter, recta HK talis longitudinis, ut HK ſit ad Hb, veluti eſt a^2 ad m^2. Et, ſicuti Hb fiet diameter hyperbolæ deſcribendæ, ita deſignabit HK, tum parametrum hujus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum.

482. Neque vero difficile erit oſtendere, quod per hujuſmodi hyperbolam fit ſatis propoſitæ æquationi $y^2 - 2ay + 4axy : c + 3a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$. Producta enim NO uſque donec hyperbolæ occurrat in M, poſitaque NM $= y$, fiet MO $= y - a + 2ax : c$. Quum autem habeatur $u = x - 2c - bc^2 : a^2$, ſitque portio GO $= mu : c$; erit, per ſubſtitutionem, eadem GO $= mx : c - 2m - bcm : a^2$. Unde, quum, propter hyperbolam, MO quadratum ſit ad differentiam quadratorum GO, GH, veluti eſt HK ab Hb; erit, ut $y^2 - 2ay + a^2 + 4axy : c - 4a^2x : c + 4a^2x^2 : c^2$ ad $m^2x^2 : c^2 - 4m^2x : c + 4m^2 - 2bm^2x : a^2 + 4bcm^2 : a^2 + b^2c^2m^2 : a^4 - d^2m^2 : c^2$, ita a^2 ad m^2: proindeque erit $y^a - 2ay + a^2 + 4axy : c - 4a^2x : c + 4a^2x^2 : c^2 = a^2x^2 : c^2 - 4a^2x : c + 4a^2 - 2bx + 4bc + b^2c^2 : a^2 - a^2d^2 : c^2$, quæ reducitur ad $y^2 - 2ay + 4axy : c + 3a^2x^2 : c^2 + 2bx = 0$, ponendo loco d^2 valorem ejus $3c^2 + 4bc^3 : a^2 + b^2c^4 : a^4$.

483. Proponatur quoque conſtruenda æquatio $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = ax + b^2$, quæ ſimiliter locum exhibet ad hyperbolam, relate ad aliquam ex ejus diametris conſideratam. Fiat $y - x = z$. Quumque habeatur $y^2 - 2xy + x^2 = z^2$, ſive $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = z^2 - x^2 : 4$

erit,

erit, ſubſtitutionis ope, $z^2 - x^2 : 4 = ax + b^2$, ſive etiam $4z^2 = 4ax + x^2 + 4b^2$. Fiat quoque $x + 2a = u$. Et quoniam habetur $x^2 + 4ax = u^2 - 4a^2$; erit, rurſus per ſubſtitutionem, $4z^2 = u^2 - 4a^2 + 4b^2$. Denique ponatur $4a^2 - 4b^2 = d^2$; & habebitur $4z^2 = u^2 - d^2$, quam liquet eſſe ejuſdem formæ cum æquatione $my^2 : n = x^2 - t^2$, quæ exhibet in hyperbola, relate ad diametrum aliquam conſiderata, formulam, omnium ſimpliciſſimam.

484. Sint nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. FIG. 57. Erit ergo ipſius AB portio quælibet $AN = x$. Quumque habeatur $x + 2a = u$: producendo BA uſque in D, ita, ut ſit $AD = 2a$; fiet unaquæque ipſarum $DN = x + 2a = u$. Jam vero habetur quoque $y - x = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y minuantur quantitate variabili x: quod quidem fiet, ſi ducta ad plagam oppoſitam, ipſi AC æquidiſtanter, recta DE alteri AD æquali, agatur per punctum A recta EF. Nam, ſi ex aliquo punctorum N, æquidiſtanter eidem AC, ducatur recta NO, quæ conveniat cum AF in O: ob æquales AD, DE, erunt etiam æquales duæ AN, NO; & conſequenter erit $NO = x$.

485. Quum autem in æquatione reducta $4z^2 = u^2 - d^2$ referant z diametri ordinatas; erit punctum E centrum deſcribendæ hyperbole, ejuſque diameter locabitur ſuper EF. Et quoniam, poſito, quod AD ſit ad AE, veluti eſt a ad m, ſit quælibet diametri portio $EO = mu : a$; multum abeſt, ut ſit d ſemidiameter ejus

hyperbolæ, & ratio parametri ad diametrum æqualis ei, quam habet 1 ad 4. Unde, ſi ſemidiameter vocetur q, & ratio parametri ad diametrum ſtatuatur æqualis ei, quam habet a ad n; erit, ut z^2 ad $m^2u^2 : a^2 - q^2$, ita a ad n: proindeque erit $nz^2 : a = m^2u^2 : a^2 - q^2$, ſive etiam $anz^2 : m^2 = u^2 - a^2q^2 : m^2$.

486. Hinc, comparata æquatione iſta cum ipſa æquatione reducta $4z^2 = u^2 - d^2$; fiet primo $an : m^2 = 4$: unde infertur $n = 4m^2 : a$; & ſecundo $a^2q^2 : m^2 = d^2$: unde eruitur $q = dm : a$: proindeque ſemidiameter deſcribendæ hyperbolæ erit $dm : a$, & ratio parametri ad diametrum erit æqualis ei, quam habet a ad $4m^2 : a$, ſive etiam a^2 ad $4m^2$. Capiantur itaque ſuper AF hinc inde a puncto E portiones EF, Ef, ita, ut ſit, tam EF, quam E$f = dm : a$; ducaturque, ipſi AC æquidiſtanter, recta FG talis longitudinis, ut FG ſit ad Ff, veluti eſt a^2 ad $4m^2$. Et, ſicuti Ff fiet diameter hyperbolæ deſcribendæ, ita deſignabit FG, tum parametrum hujus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum.

487. Nec ſane arduum erit oſtendere, quod per hujuſmodi hyperbolam ſit ſatis propoſitæ æquationi $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = ax + b^2$. Producta enim NO, uſque donec hyperbolæ occurrat in M, poſitaque NM $= y$, fiet MO $= y - x$. Quum autem habeatur $u = x + 2a$, ſitque portio EO $= mu : a$; erit, per ſubſtitutionem, eadem EO $= mx : a + 2m$. Unde, quum, propter hyperbolam, MO quadratum ſit ad differentiam quadratorum EO, EF, veluti eſt FG ad Ff; erit, ut $y^2 - 2xy + x^2$ ad $m^2x^2 : a^2 + 4m^2x : a + 4m^2 - d^2m^2 : a^2$, ita a^2 ad $4m^2$:

proin-

proindeque erit $y^2 - 2xy + x^2 = x^2 : 4 + ax + a^2 - d^2 : 4$, hoc eſt $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = ax + b^2$, ponendo loco d^2 valorem ejus $4a^2 - 4b^2$, & delendo terminus ſe mutuo deſtruentes.

488. Hic etiam notare oportet, quod, ubi fecimus $4a^2 - 4b^2 = d^2$, tacite ſuppoſuimus, a^2 majorem eſſe, quam b^2. Sed fieri poteſt, ut a^2 ſit viciſſim minor, quam b^2; & tunc, quemadmodum poni debet $4b^2 - 4a^2 = d^2$, ita æquatio reducta erit $4z^2 = a^2 + d^2$; proindeque, per ea, quæ ſupra * notata ſunt, iiſdem ut antea peractis, evadet Ff diameter ſecunda hyperbolæ deſcribendæ. Ita enim erit, ut FG ad Ff, ita MO quadratum ad ſummam quadratorum EO, EF. Unde, quum ſit, ut a^2 ad $4m^2$, ita $y^2 - 2xy + x^2$ ad $m^2x^2 : a^2 + 4m^2x : a + 4m^2 + d^2m^2 : a^2$; erit rurſus, ut antea, $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = ax + b^2$. *art. 465.

489. Fieri pariter poteſt, ut ſit $a^2 = b^2$; & tunc, ſicuti æquatio reducta erit $4z^2 = a^2$, ita hyperbola ipſa vertetur in duplicem rectam. Et ſane, ſemper ac habetur $a^2 = b^2$, æquatio, de qua agitur, $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = ax + b^2$ mutabitur in hanc aliam $y^2 - 2xy + 3x^2 : 4 = ax + a^2$, quæ fiet $y^2 - 2xy + x^2 = x^2 : 4 + ax + a^2$, ſi utrique ejus parti addatur $x^2 : 4$. Quare, per extractionem quadratæ radicis, habebitur, non modo $y - x = x : 2 + a$, hoc eſt $y = 3x : 2 + a$, verum etiam $x - y = x : 2 + a$, ſive $x : 2 - y = a$: & profecto utraque harum æquationum ad lineam rectam nos ducit.

IV. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad diametrorum aliquam conſideratam, per formulam, omnium maxime compoſitam.*

490. EXpoſita ratione componendi loca ad hyperbolam, relate ad diametrorum aliquam conſideratam, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam; videamus modo, quo pacto eadem loca ad hyperbolam conſtrui debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita: quem in finem qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

491. Nimirum, referendo hyperbolæ puncta omnia ad rectam, poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ; perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta poſitione data ſit ipſa illa diameter. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula hyperbolæ, relate ad diametrorum aliquam conſideratæ, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

492. Sit igitur punctum G centrum hyperbolæ, & recta H*b* aliqua ejus diameter, ſitq; etiam HK recta, quæ exhibet, tum parametrum illius diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Agatur deinde AE, eidem diametro parallela, & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum

FIG. 58.

quod

quodvis D. Et, ductis rectis AF, DE, ipſi HK parallelis, & convenientibus cum aliis Hb, AE in punctis F, & E, ponatur AD $= n$, DE $= m$, AE $= s$, HK $= p$, AF $= q$, GF $= r$, & GH, vel G$b = t$.

493. Capiatur nunc in hyperbola punctum aliquod M., ex quo demittatur ad diametrum Hb ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AE in R; ponaturque inſuper AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AD ad DE; erit NR $= mx : n$; proindeque, ob æquales RO, AF, erit MO $= y + mx : n + q$. Quumque AN ſit ad AR, ſive FO, ut AD ad AE; erit FO $= sx : n$; & conſequenter, quum ſit GF $= r$, fiet GO $= r + sx : n$.

494. Jam, propter hyperbolam, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum GO, GH, veluti eſt HK ad Hb. Quare erit, ut $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + 2mqx : n + q^2$ ad $r^2 + 2rsx : n + s^2x^2 : n^2 - t^2$, ita p ad $2t$. Unde fiet $y^2 + 2mxy : n + m^2x^2 : n^2 + 2qy + 2mqx : n + q^2 = pr^2 : 2t + prsx : nt + ps^2x^2 : 2n^2t - pt : 2$; ſive etiam $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t - ps^2)x^2 : 2n^2t + 2qy + (2mqt - prs)x : nt + (q^2 + pt : 2 - pr^2 : 2t) = 0$.

495. Hæc igitur eſt æquatio, quæ exhibet nobis formulam hyperbolæ, relate ad diametrorum aliquam conſideratæ, omnium maxime compoſitam. Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formula, ubi quadratum y^2 omni coefficiente denudatum reperitur, coefficientem alterius quadrati x^2 augendum eſſe nonnihil, quo priores tres termini $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t - ps^2)x^2 : 2n^2t$ conſtituere queant quadratum perfectum;

nec deficiente termino $2mxy:n$ deficere quoque debere terminum alterum, in quo quadratum
*art. 461. x^2 continetur. Unde veritas regulæ, ſuperius *
463. traditæ, pro cognoſcendis locis ad hyperbolam, relate ad diametrorum aliquam conſideratam, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

496. Qua porro ratione, ope inventæ formulæ generalis, loca ad prædictam hyperbolam conſtruantur; haud arduum erit intelligere. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ, danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Quod ſi vero earum aliqua oriatur negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

497. Cæterum quantitates, quæ locum determinant, ſunt m, n, p, q, r, s, t. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum p, q, r, t valores innoteſcunt. Et quantum ad priores duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poteſt ad libitum; & tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

498. Determinatis valoribus ipſarum m, & n, etiam quantitatis s valor innoteſcet. In triangulo enim DAE notus eſt angulus ADE, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AD, DE deſignata per quantitates n, & m, ſimiliter no-

nota ſunt; cognoſcemus quoq;tertium latus AE, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$,ubi valor ipſius m nullus reperitur;quandoquidem, evaneſcente DE, cadit AB ſuper AE & puncta duo D, & E coeunt in unum.

499. Hic etiam notare oportet, quod, perinde ac in locis ad ellipſim, valor parametri p numquam negativus poteſt oriri. Unde, quod in conſtructione locorum ad parabolam obſervavimus, hic quoque nequit locum habere. Potius valor ſemidiametri t oriri poteſt quandoque imaginarius. Et, quum id contingit, haud quidem putandum eſt, quæſitum locum contradictionem aliquam involvere; ſed tantum argumento id nobis eſſe debet, diametrum ex prima fieri ſecundam. Nec reticebimus, ejuſdem ſemidiametri valorem poſſe etiam interdum nihilo æqualem reperiri; & eo in caſu hyperbola ipſa ad duplicem rectam reducetur.

IV. *Præcedens loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, componendi ratio exemplis illuſtrata.*

500. UT exemplis notior evadat præcedens loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris, conſideratam, componendi ratio, proponatur primum conſtruenda æquatio $y^2 - 2ay - ax^2 : c + a^2 + ab = 0$. Quia in ea deeſt terminus xy; utique fractio $2m : n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante * notata ſunt, * art. 498.
erit $n = s$ adeoque ipſa formula fiet $y^2 - px^2$:

ap

$2t + 2qy - prx : t + (q^2 + pt : 2 - pr^2 : 2t)$
$= 0$.

501. Jam, inſtituta comparatione, habebitur $p : 2t = a : c$, $2q = - 2a$, $pr : t = 0$, & $q^2 + pt : 2 - pr^2 : 2t = a^2 + ab$. Ex his auautem, ſicuti eruitur $q = - a$, $r = 0$, & $pt = 2ab$; ita, quum ſit $p : 2t = a : c$, erit $p = 2at : c$; atque adeo $pt = 2at^2 : c = 2ab$, hoc eſt $t^2 = = bc$; & conſequenter $t = \sqrt{bc}$. Erat autem $p = 2at : c$. Itaque, poſito loco t valore ejus, fiet $p = 2a\sqrt{bc} : c$: & propterea, exiſtentibus AB
FIG. 59. linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus quæſitus in hunc modum.

502. Abſcindatur ex AC portio AF $= a$. Tum, ducta FH, ipſi AB parallela, capiantur ſuper ea hinc inde a puncto F portiones FH, Fb talis longitudinis, ut ſit, tam FH, quam Fb $= \sqrt{bc}$. Agatur poſtea, æquidiſtanter ipſi AC, recta HK $= 2a\sqrt{bc} : c$. Jamque, ſi hyperbola deſcribatur, cujus Hb ſit diameter, HK parameter diametri, & eadem HK referat poſitionem ſuarum ordinatarum; erit hyperbola iſta terminus loci quæſiti.

503. Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur, uſque donec ipſi AB occurrat in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$; erit, ex conſtructione, MO $= y - a$. Sed, propter hyperbolam, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum FO, FH, veluti eſt HK ad Hb. Quare erit, ut $y^2 - 2ay + a^2$ ad $x^2 - bc$, ita $2a\sqrt{bc} : c$ ad $2\sqrt{bc}$, ſive, ita a ad c. Unde fiet $y^2 - 2ay - ax^2 : c + a^2 + ab = 0$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

504. Oporteat etiam, conſtruere æquationem, $y^2 - 2axy : c - a^2x^2 : c^2 - 2by + a^2 = 0$, quæ ſimiliter locum exhibet ad hyperbolam, relate ad diametrorum aliquam conſideratam. Quia hic adeſt terminus xy; inſtituta comparatione, habebitur primo $2m : n = -2a : c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $2m = -2a$, ſive $m = -a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $(2m^2t - ps^2) : 2n^2t = -a^2 : c^2$, $2q = -2b$, $(2mqt - prs) : nt = 0$, & $q^2 + pt : 2 - pr^2 : 2t = a^2$: quæ, per debitas ſubſtitutiones, dabunt $p = 4a^2t : s^2$, $q = -b$, $r = bs : 2a$, & $t^2 = s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2$.

505. Hinc, ſicuti, per extractionem quadratæ radicis, fit $t = \sqrt{(s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2)}$; ita, quum ſit $p = 4a^2t : s^2$, erit, ſubſtitutionis ope, $p = 4a^2\sqrt{(s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2)} : s^2$. Unde, niſi ſit $2a^2$ major, quam b^2, valor ipſius t, vel nullus, vel imaginarius prodibit. Ponamus ergo, $2a^2$ majorem eſſe, quam b^2: ita, ut p, & t valores habeant reales. Et, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus, de quo agitur, in hunc, qui ſequitur, modum. FIG. 60.

506. Capiatur in AB portio AD $= c$; &, ducta DE $= a$, parallela quidem ipſi AC, ſed ad plagam oppoſitam ei, verſus quam tendit in figura formulæ, jungatur AE. Abſcindatur deinde ex AC portio AF $= b$, perque punctum F agatur recta FH, parallela ipſi AE, ſuper qua capiatur ſurſum verſus portio FG $= bs : 2a$. Denique, poſitis GH, ſive G$h = \sqrt{(s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2)}$, & HK $= 4a^2\sqrt{(s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2)} : s^2$, deſcribatur hyperbola, cujus Hh ſit diameter,

ter,

ter, HK parameter diametri, & eadem HK deſignet poſitionem ſuarum ordinatarum. Jamque hyperbola iſta terminus fiet loci quæſiti.

507. Ducatur namque ex aliquo ejus puncto M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipſis AB, AE in N, & R. Quia ergo AD eſt ad DE, ut AN ad NR, erit NR $= ax : c$. Quumque etiam AD ſit ad AE, ut AN ad AR, ſive FO; erit FO $= sx : c$. Unde fiet MO $= y - ax : c - b$, & GO $= sx : c + bs : 2a$. Eſt autem, propter hyperbolam, ut MO quadratum ad differentiam quadratorum GO, GH, ita HK ad Hb. Itaque erit, ut $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 - 2by + 2abx : c + b^2$ ad $s^2x^2 : c^2 + bs^2x : ac + b^2s^2 : 2a^2 - s^2 : 2$, ita $4a^2\surd(s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2) : s^2$ ad $2\surd(s^2 : 2 - b^2s^2 : 4a^2)$, ſive, ita $2a^2$ ad s^2. Unde eruitur $y^2 - 2axy : c - a^2x^2 : c^2 - 2by + a^2 = 0$, quæ eſt æquatio propoſita.

508. In allato igitur exemplo, ut valor ſemidiametri s realis evadat, neceſſe quidem eſt, ut $2a^2$ major ſit, quam b^2. Sed, ſi fuerit $2a^2$ minor, quam b^2, tunc ejuſdem ſemidiametri valor prodibit imaginarius: quo in caſu, ut ſuperius * notavimus, ipſa hyperbolæ diameter

*art. 499.

Hb ex prima vertetur in ſecundam. Sic enim, propter hyperbolam, erit ut MO quadratum ad ſummam quadratorum GO, GH, ita HK ad Hb: proindeque, omnibus ut antea poſitis, niſi quod fieri debet GH, vel Gb $= \surd(b^2s^2 : 4a^2 - s^2 : 2)$, & HK $= 4a^2(b^2s^2 : 4a^2 - s^2 : 2) : s^2$, rurſus habebitur æquatio propoſita $y^2 - 2axy : c - a^2x^2 : c^2 - 2by + a^2 = 0$.

509. Fieri etiam poteſt, ut ſit $2a^2 = b^2$; & tunc, evaneſcente valore ſemidiametri s, verte-

tur

tur hyperbola in rectas duas, ſeſe invicem ſecantes in centro G. Id vero ut oſtendamus, addatur utrique æquationis parti communis quantitas $2a^2x^2 : c^2 + 2abx : c + b^2 - a^2$; & erit $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 - 2by + 2abx : c + b^2 = 2a^2x^2 : c^2 + 2abx : c + b^2 - a^2$, ſive etiam $y^2 - 2axy : c + a^2x^2 : c^2 - 2by + 2abx : c + b^2 = b^2x^2 : c^2 + 2abx : c + a^2$. Quare, per extractionem quadratæ radicis, fiet, tum $y - ax : c - b = bx : c + a$, cum $-y + ax : c + b = bx : c + a$, quæ duæ æquationes ad lineam rectam nos ducunt.

V. *Monitum circa compoſitionem locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam.*

510. Quemadmodum in æquationibus localibus, quæ nos ducunt ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, aſſumpſimus ſemper x, & y pro duabus earum incognitis; ita in earundem compoſitione illud perpetuo curavimus, ut abſciſſæ quidem AN, capiendæ ſuper AB, deſignarent valores incognitæ x; ordinatæ vero NM, ducendæ æquidiſtanter alteri AC, repræſentarent valores alterius incognitæ y.

511. Sed notari hic ſedulo debet, quod, exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poteſt, ut deſignari debeant, per abſciſſas quidem AN valores incognitæ y, per ordinatas vero NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane, in utraque loca componendi ratione, difficile erit, definire, quan-

quando demum id fieri debeat.

512. Nimirum, quum conſtruitur locus per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, fieri id debet, quotieſcumque in æquatione reducta per fractionem aliquam multiplicatum reperitur, non jam quadratum, ſive incognitæ y, ſive ejus, quæ ex ipſa dependet; ſed quadratum, vel alterius incognitæ x, vel ejus, quæ ex hac alia proficiſcitur.

513. Sic æquatio $mx^2 : n - 2mx + 2mn = 2ay + y^2$ mutationem illam expoſcit. Nam faciendo $x - n = u$, $y + a = z$, & $a^2 + mn = d^2$; habetur loco ejus hæc alia $mu^2 : n = z^2 - d^2$, in qua per fractionem $m : n$ multiplicatum reperitur quadratum incognitæ u, quæ dependet, non quidem ex y, ſed ex x; quum ex hypotheſi habeatur $x - n = u$.

514. Quotieſcumque vero conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam, omnium maxime compoſitam, illud idem fieri debet, quando in æquatione conſtruenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic ſequens æquatio $x^2 - 2axy : c - a^2y^2 : c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$ exigit quoque eam variationem, quia quadratum incognitæ x illud eſt, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

515. Interim, quum æquatio, quæ nos ducit ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, conſtruitur per reductionem ejus ad formulam, omnium maxime compoſitam, eademque natura ſua mutationem illam expoſcit, debent etiam in formula incognitæ permu-

mutari: adeo nempe, ut ſcribere oportebit incognitam x loco alterius y, & viciſſim incognitam y loco alterius x.

516. Ita æquatio $x^2 - 2axy:c - a^2y^2:c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$, ob quadratum x^2, omni fractione denudatum, exigit eam mutationem. Plane vero formula, cum qua comparanda eſt illiuſmodi æquatio, haud quidem eſſe debet $y^2 + 2mxy:n + (2m^2t - ps^2)x^2:2n^2t + 2qy + (2mqt - prs)x:nt + (q^2 + pt:2 - pr^2:2t = 0$, ſed $x^2 + 2mxy:n + (2m^2t - ps^2)y^2:2n^2t + 2qx + (2mqt - prs)y:nt + (q^2 + pt:2 - pr^2:2t) = 0$.

517. Fatendum eſt tamen, variationem iſtam non eſſe abſolute neceſſariam. Nam in priore exemplo * $mx^2:n - 2mx + 2mn =$ *art.513. $2ay + y^2$, etſi, faciendo $x - n = u$, $y + a = z$, & $a^2 + mn = d^2$, habeatur $mu^2:n = z^2 - d^2$; multiplicando tamen omnes æquationis terminos per n, eoſdemque dividendo per m, fiet $u^2 = nz^2:m - nd^2:m$, ſive etiam $nz^2:m = u^2 + nd^2:m$: ubi per fractionem $n:m$ multiplicatam reperitur quadratum incognitæ z, quæ ex y trahit originem ſuam,

518. Atque ita quoque in ſecundo exemplo *, etſi æquatio ſit $x^2 - 2axy:c - a^2y^2:$ *art.514. $c^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$; multiplicatis tamen terminis omnibus per c^2, iiſdemque diviſis per a^2, habebitur $c^2x^2:a^2 - 2cxy:a - y^2 - 2c^2x:a - 2bc^2y:a^2 + c^4:a^2 = 0$, ſive $y^2 + 2cxy:a - c^2x^2:a^2 + 2c^2x:a + 2bc^2y:a^2 - c^4:a^2 = 0$: ubi, non amplius quadratum incognitæ x, ſed quadratum alterius incognitæ y omni vacat fractione.

519.

519. Perſpicuum eſt autem, hoc idem præſtari poſſe in omnibus æquationibus, quæ nos ducunt ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam; quum hujuſmodi æquationes utriuſque incognitæ quadratum debeant continere: adeo nempe, ut præparata æquatione, ſive propoſita, ſive reducta per vulgatas operationes, & exiſtentibus x, & y duabus ejuſdem æquationis incognitis, licebit ſemper deſignare, per abſciſſas quidem AN valores incognitæ x, per ordinatas vero NM valores alterius incognitæ y.

520. Non eſt interim hoc loco reticendum, dari poſſe æquationes nonnullas, quæ etiam abſque præparatione utroque modo conſtrui poſſunt. Contingit id autem, quum in æquatione utriuſque incognitæ quadratum omni vacat fractione; veluti eſt æquatio iſta $y^2 + 2ay = 2bx + x^2$, vel etiam hæc alia $y^2 + 2xy - x^2 - 2ay - 2bx = 0$. Et ex iis, quæ mox dicenda erunt, ubi deeſt productum duarum incognitarum, hujus formæ eſſe debent æquationes, quæ ſpeciatim ad hyperbolam æquilateram nos ducunt.

VII. *Notio hyperbolæ æquilateræ, & quomodo loca ad eam dignoſci poſſunt.*

521. Ellipſi eſt adeo affinis hyperbola, ut, ſicuti ellipſis poteſt eſſe variarum ſpecierum, ſic etiam hyperbola multiplicis ſpeciei eſſe queat. Omnes autem formæ diverſæ, quas ellipſis ſubire poteſt, in hyperbola pariter locum habent. Unde, ſicuti in ellipſi ex

iis

iis formis una datur, quum ellipſis ipſa abit in circulum; ſic pariter in hyperbola ſpecialis forma adeſſe debet, per quam ipſa hyperbola circulo affinis evadit.

522. Et quidem, tum ellipſis, cum hyperbola ſubit varias formas, pro variis rationibus, quas axis ad ſuam parametrum poteſt habere. Quare, ſicuti ellipſis abit in circulum, quum axis parametrum ſuam adæquat; ſic etiam habebitur forma, per quam hyperbola circulo affinis evadit, quotieſcumque inter axem hyperbolæ, & ejus parametrum, non alia ratio, quam æqualitatis deprehenditur.

523. In utraque pariter curva, quum axis ſuam parametrum adæquat, etiam quælibet alia diameter rationem æqualitatis habebit ad parametrum ſuam. Indeque eſt, ut ea hyperbola, quæ circulo correſpondet, æquilatera fuerit appellata. Nam in utraque harum curvarum vocarunt Veteres latus tranſverſum quamlibet curvæ diametrum, & latus rectum parametrum, quæ ad eam diametrum refertur.

524. Interim inter hyperbolam, & ellipſim illud diſcriminis occurrit, quod, ſiquidem in hyperbola aliqua extiterit diameter, quæ parametrum ſuam adæquat; omnes aliæ diametri etiam æquales erunt parametris ſuis, & conſequenter ipſa hyperbola æquilatera erit. Non perinde vero ſe res habet in ellipſi. In ea enim poteſt aliqua diameter parametrum ſuam adæquare; nec idcirco omnes aliæ diametri æquales fient parametris ſuis.

525. Id vero exinde dependet, quod in qualibet ellipſi dantur binæ diametri, quæ adæquant

parametros ſuas. Si enim vertices axis minoris cum vertice uno alterius axis majoris per rectas totidem jungantur; diametri, quæ rectas iſtas velut ordinatas agnoſcunt, æquales erunt inter ſe; adeoque, quum earundem diametrorum una ſit alterius conjugata, plane neceſſe eſt, ut eædem diametri ſint æquales quoque parametris, quæ ad ipſas referuntur.

526. Secus autem ſe res habet in hyperbola. In ea enim, ſi duo axes ſint inæquales inter ſe, nulla etiam aderit diameter, quæ conjugatam ſuam, atque adeo ipſius parametrum adæquet: niſi velimus in numerum diametrorum ipſas hyperbolæ aſymptotos accenſere: quæ, ſicuti inveniuntur, conjungendo per rectas totidem vertices unius axis cum vertice uno axis alterius, & ducendo per centrum binas alias rectas, quæ priores biſecent; ita una erit alterius conjugata, adeoque, velut æquales inter ſe, etiam parametros ſuas adæquabunt.

527. Hinc, in conſtructione locorum ad ellipſim, pro dignoſcendis locis illis, quæ ſpeciatim ad circulum nos ducunt, haud quidem ſatis eſt, ut parameter fiat æqualis diametro, ad quam refertur; ſed, ut ſuperius * monuimus, neceſſe eſt pariter, ut ordinatæ rectos cum diametro angulos conſtituant. Verum in conſtructione locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, cognoſcentur loca, quæ ſpeciatim nos ducunt ad hyperbolam æquilateram, per id tantum, quod parameter cum diametro, ad quam refertur, ſervat rationem æqualitatis.

* art. 447.

528. Proponatur, exempli gratia, conſtruenda

da æquatio $y^2 + 2ay = 2bx + x^2$, quæ ad hyperbolam nos ducit, relate ad aliquam ex ejus diametris conſideratam; & peragenda ſit ejus conſtructio, per reductionem ad formulam, omnium ſimpliciſſimam. Fiat, tum $y + a = z$, cum $x + b = u$. Et quoniam habetur $y^2 + 2ay = z^2 - a^2$, & $x^2 + 2bx = u^2 - b^2$; erit $z^2 - a^2 = u^2 - b^2$, ſive etiam $z^2 = u^2 - b^2 + a^2$. Ponatur quoque, ſive $b^2 - a^2 = d^2$, ſive $a^2 - b^2 = d^2$; & erit, vel $z^2 = u^2 - d^2$, vel $z^2 = u^2 + d^2$ æquatio reducta.

529. Plane vero hujuſmodi æquatio oſtendit nobis, rationem parametri ad ſuam diametrum eſſe æqualitatis. Quare hyperbola, per quam ei fit ſatis, æquilatera erit. Hoc autem exemplo abunde liquet veritas ejus, quod paulo ante * dictum eſt: nimirum, quod, ubi deeſt in æquatione productum duarum incognitarum, æquatio ipſa non aliter ad hyperbolam æquilateram ſpeciatim nos ducet, niſi, quum in ea utriuſque incognitæ quadratum omni prorſus fractione denudatum occurrit. *art. 520.

530. Generaliter autem id demonſtrare licebit, per ipſam hyperbolæ formulam generalem $y^2 + 2mxy : n + (2m^2t - ps^2)x^2 : 2n^2t + 2qy + (2mqt - prs)x : nt + (q^2 + pt : 2 - pr^2 : 2t) = 0$. Nam, ut in ea deſit terminus, continens productum incognitarum xy, neceſſe eſt, ut ſit $m = 0$. Plane vero, exiſtente $m = 0$, fiet etiam * $n = s$. Unde formula ipſa evadet $y^2 - px^2 : 2t + 2qy - prx : t + (q^2 + pt : 2 - pr^2 : 2t) = 0$: proindeque in hypotheſi, quod ſit $p = 2t$, eadem fiet $y^2 - x^2 + 2qy - 2rx + (q^2 + t^2 - r^2) = 0$, in qua utriuſ- *art. 498.

que incognitæ quadratum omni fractione denudatum deprehenditur.

531. Ubi vero adeſt in æquatione terminus, continens productum duarum incognitarum xy, haud quidem neceſſe eſt, ut utriuſque incognitæ quadratum omni prorſus fractione ſit denudatum, quo locus fiat hyperbolæ æquilateræ. Nam, poſito, quod ſit $p = 2t$, hyperbolæ formula generalis evadit $y^2 + 2mxy : n + (m^2 - s^2)x^2 : n^2 + 2qy + (2mq - 2rs)x : n + (q^2 + t^2 - r^2) = 0$: & profecto, ſicuti nihil cogit, ut ſit ſemper $m^2 - s^2 = n^2$, ita nec etiam ſemper quadratum alterius incognitæ x omni omnino fractione denudatum eſſe oportebit.

VIII. *Demonſtratio theorematis, unde notio pendet hyperbolæ æquilateræ.*

* Art. 523.

532. Diximus *, tum in ellipſi, cum in hyperbola non poſſe axem parametrum ſuam adæquare, quin quælibet alia diameter fiat etiam æqualis parametro, quæ ad ipſam refertur. Id vero in ellipſi facile quidem erit oſtendere. Nam in ea ſemper ac axis parametrum ſuam adæquat, æqualis fiet ipſi axi quælibet alia diameter. Unde, quum quævis diameter adæquet ſuam conjugatam; plane neceſſe eſt, ut adæquet quoque parametrum ſibi correſpondentem: quippe quæ eſt tertia proportionalis poſt ipſam diametrum, & ejus conjugatam.

FIG. 8. 533. Eſto etenim AB axis ellipſis, C centrum ejus, & EF quævis alia diameter. Demittatur ex vertice diametri E ad axem AB ordina-

ta EG. Jamque, ubi axis AB adæquat parametrum ſuam, erit etiam EG quadratum æquale rectangulo AGB. Unde, ſi utrique addatur commune quadratum ex CG; erit CE quadratum æquale quadrato ex GA: proindeque, ſicuti æquales fiunt duæ CE, CA; ita & integra diameter EF æqualis erit toti axi AB.

534. Quum autem hæc demonſtratio minime locum habeat in hyperbola, videamus, quo pacto in ea oſtendi poſſit, quod, ubi axis parametrum ſuam adæquat, etiam quælibet alia diameter æqualis eſſe debet parametro, quæ ad ipſam refertur. Hunc in finem ſit AB axis hyperbolæ, C centrum ejus, & EF quævis alia diameter; ſitque etiam KL axis conjugatus ipſius AB, & PR diameter conjugata ipſius EF. Jamque, ſicuti, quum axis AB adæquat parametrum ſuam, fiunt duo axes AB, KL æquales inter ſe; ita, ſi utique oſtendi poſſit, duas EF, PR æquales eſſe inter ſe, fiet EF æqualis parametro ſibi correſpondenti. FIG. 17.

535. Ad id vero oſtendendum, demittantur, tum ad axes AB, KL ordinatæ EG, PQ, cum ad diametrum EF ordinata AO; eritque ex ſuperius * oſtenſis, ut CE ad CO, ita CA ad CG. Sed, ducta EI ipſi AO parallela, CE eſt ad CO, ut EI ad AO. Quare erit, ex æquali, ut EI ad AO, ita CA ad CG: & propterea, quia EI eſt ad AO in ratione compoſita ex EI ad EG, & ex EG ad AO; erit in hac eadem ratione compoſita pariter CA ad CG. *art. 194.

536. Jam, ob triangula æquiangula EGI, PQC, EI eſt ad EG, ut CP ad CQ; & per ea, quæ ſupra * demonſtrata ſunt, EG eſt ad AO, *art. 199.

ut CK ad CP. Itaque erit rurſus CA ad CG in ratione compoſita ex CK ad CP, & ex CP ad CQ; ſive etiam in ſimplici ratione, quam habet CK ad CQ: proindeque, quum ſit etiam, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita CK quadratum ad CQ quadratum; ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit pariter, ut CA quadratum ad rectangulum AGB, ita CK quadratum ad rectangulum KQL.

537. Quum autem, propter hyperbolam, CA quadratum ſit ad rectangulum AGB, ut CK quadratum ad EG quadratum; erit EG quadratum æquale rectangulo KQL. Et ſimiliter, quia ob hyperbolam conjugatam, CK quadratum eſt ad rectangulum KQL, ut CA quadratum ad PQ quadratum; erit PQ quadratum æquale rectangulo AGB. Unde ſumma quidem quadratorum CA, PQ æqualis erit quadrato, quod fit ex CG; ſumma vero quadratorum CK, EG æqualis erit quadrato, quod fit ex CQ.

538. Quia vero CE quadratum eſt æquale duobus quadratis CG, EG; erit idem CE quadratum æquale tribus quadratis CA, PQ, EG. Et ſimiliter, quia CP quadratum eſt æquale duobus quadratis CQ, PQ; erit idem CP quadratum æquale tribus quadratis CK, PQ, EG: & propterea eadem ſumma quadratorum PQ, EG erit, tum exceſſus, quo CE quadratum ſuperat CA quadratum, cum exceſſus, quo CP quadratum ſuperat CK quadratum.

539. Differentia igitur quadratorum CE, CA æqualis eſt differentiæ quadratorum CP, CK. Quare etiam differentia quadratorum EF,

AB

AB æqualis erit differentiæ quadratorum PR, KL. Id vero quum ita ſit, abunde liquet, quod, ubi axis AB adæquat, tum parametrum ſuam, cum axem ſuum conjugatum KL, etiam diameter quælibet alia EF æqualis fieri debet, tam conjugatæ ſuæ PR, quam parametro, quæ ipſi correſpondet. Aliter enim differentia quadratorum EF, AB non foret æqualis differentiæ quadratorum PR, KL.

540. Sed, ob eandem rationem, perſpicuum eſt quoque, diametrum EF minorem eſſe debere conjugata ſua PR, quotieſcumque axis AB minor eſt axe ſuo conjugato KL; & viciſſim majorem, quum AB major eſt, quam KL. Unde generaliter in hyperbola quælibet ejus diameter EF erit æqualis, minor, vel major conjugata ſua PR, prout axis AB eſt æqualis, minor, vel major axe ſuo conjugato KL.

CAPUT V.

Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam.

541. TRadita compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex ſuis diametris conſideratam; oſtendemus modo, qua ratione componenda ſint loca illa, in quibus hyperbola ſub contemplationem venit relate ad ſuas aſymptotos. Perinde autem, ac in aliis locorum ſpeciebus factum eſt; primo quidem docebimus, quomodo componi poſſint hujuſmodi loca, adhibita, formula omnium ſim-

pliciſſima ; tum deinde explicabimus, quo pacto fiat eorundem locorum compoſitio, in ſubſidium advocata formula, quæ ſit omnium maxime compoſita.

I. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

542. IN hyperbola, relate ad ſuas aſymptotos conſiderata, caſus ſimpliciſſimus habetur, quum ejus puncta omnia ad aliquam ipſius aſymptotum referuntur per rectas, quæ ſint aſymptoto alteri parallelæ; hoc eſt, quum una ex aſymptotis ſumitur velut linea abſciſſarum, & altera velut linea ordinatarum. Plane vero, ſi quælibet abſciſſa vocetur x, & y quælibet ordinata; fiet rectangulum xy ejuſdem ubique magnitudinis. Quare, ſi quantitas ejus rectanguli vocetur t^2; erit $xy = t^2$ formula, omnium ſimpliciſſima, pro hyperbola, relate ad ſuas aſymptotos conſiderata.

543. Oſtendendum eſt igitur, qua ratione, ope hujus formulæ $xy = t^2$, ipſa ad hyperbolam loca componantur, ubi relate ad ſuas aſymptotos ſub contemplationem venit. Et primo quidem formulæ ipſius compoſitio nullam habet difficultatem. Eſto etenim pro ea AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiantur
FIG. 61. ſuper iis portiones AD, AE talis longitudinis, ut ſit, tam AD, quam AE $= t$, & compleatur parallelogrammmum AF. Jamque, ſi aſymptotis AB, AC deſcribatur hyperbola, quæ tranſeat per punctum F; erit hyperbola iſta terminus loci quæſiti.

544.

544. Capiatur enim in AB portio quævis AN $= x$, tumque per punctum N, ad hyperbolam uſque, ducatur, ipſi AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Ob naturam igitur hyperbolæ rectangula duo ANM, ADF æqualia erunt inter ſe. Eſt vero rectangulum ANM $= xy$, & rectangulum ADF $= t^2$. Itaque erit $xy = t^2$. Et quamquam duæ AN, NM capiantur ad partes contrarias; adhuc tamen eadem habebitur æquatio $xy = t^2$. Nam, licet in hoc caſu poni debeat, tum AN $= -x$, cum NM $= -y$; nihilominus rectangulum ANM ſemper poſitivum orietur.

545. Qua vero ratione aſymptotis AB, AC deſcribenda ſit hyperbola, quæ tranſeat per punctum F, haud difficile erit intelligere. Quum enim punctum A ſit centrum hyperbolæ, ſi extendatur AF ad partem oppoſitam verſus f, uſque donec æquales ſint duæ AF, Af; fiet tota Ff una ex diametris hyperbolæ. Et quoniam, conſtituta AB dupla ipſius AD, ductaque per punctum F recta BC; hæc, velut biſecta in F, contingit * ibidem hyperbolam: deſignabit eadem BC poſitionem ſuarum ordinatarum. Unde quæſita hyperbola nullo negotio deſcribetur, ſi ejuſdem diametri poſſit etiam parameter definiri. *ar. 222.

546. Ad hanc autem definiendam, meminiſſe oportet, quod eadem recta BC eſt * æqualis conjugatæ ipſius Ff. Hinc enim ſequitur, parametrum diametri Ff debere eſſe tertio loco proportionalem poſt duas Ff, BC; adeoque eandem haberi, ſi fiat, ut Ff ad BC, ita BC ad FG. Deſcribatur ergo hyperbola, cujus Ff ſit dia- *art. 223.

me-

meter, FG parameter diametri, & eadem FG exhibeat poſitionem ſuarum ordinatarum. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, eam, quam quærimus, nobis exhibebit; quandoquidem, tranſiens per punctum F, plane neceſſe eſt, ut habeat rectas AB, AC pro ſuis aſymptotis.

547. Jam, ſicuti æquatio localis, quæ eſt duarum dimenſionum, nos ducit ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, ubi eam reducere licet ad formulam illam; ita, habita ſuæ reductionis ratione, facile erit, locum componere, quo eidem æquationi debet fieri ſatis. Cujuſmodi autem eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius $xy = t^2$; haud arduum erit definire. Primo enim, quemadmodum in formula incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiuntur; ſic etiam non poterit æquatio aliqua ad eam formulam revocari, niſi contineat productum duarum incognitarum.

548. Sed productum iſtud, neceſſe eſt quoque, ut, vel cum nullo earundem incognitarum quadrato, vel cum uno tantum conjungatur: adeo nempe, ut ſi ambo fuerint in æquatione quadrata incognitarum, locus numquam erit ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam; ſed, per regulas, ſuperius traditas, erit, vel ad hyperbolam, conſideratam relate ad aliquam ex ſuis diametris, vel ad ellipſim, aut circuli circumferentiam, vel demum ad curvam illam, quam vocavimus parabolam, quæque, tam velut ellipſis, quam velut hyperbola, diametrum habens infinitæ longitudinis, poteſt conſiderari.

549. Proponatur, exempli gratia, æquatio

$xy - ax - by - ac = 0$, ubi productum incognitarum cum nullo earum quadrato conjungitur. Fiat $y - a = z$, ſive etiam $y = z + a$; & erit, per ſubſtitutionem, $xz + ax - ax - bz - ab - ac = 0$, ſive etiam $xz - bz - ab - ac = 0$. Fiat quoque $x - b = u$, ſive $x = u + b$; & erit, rurſus per ſubſtitutionem, $uz + bz - bz - ab - ac = 0$, hoc eſt $uz - ab - ac = 0$. Fiat demum $ab + ac = d^2$; & erit $uz - d^2 = 0$, ſive $uz = d^2$, quæ eſt ejuſdem formæ cum ſimpliciſſima illa æquatione $xy = t^2$.

550. Proponatur etiam æquatio $ax - x^2 + xy + by - ac = 0$, ubi productum incognitarum cum uno tantum earum quadrato conjungitur. Capiatur $x + b = u$, ſive $x = u - b$. Et, ponendo ubique $u - b$ loco x, & $u^2 - 2bu + b^2$ loco x^2, erit $au - ab - u^2 + 2bu - b^2 + uy - by + by - ac = 0$, ſive etiam $au - u^2 + 2bu + uy - ab - b^2 - ac = 0$. Capiatur quoque $a - u + 2b + y = x$. Et quoniam, multiplicando per u, habetur $au - u^2 + 2bu + uy = uz$; erit, per ſubſtitutionem, $uz - ab - b^2 - ac = 0$. Unde, ponendo demum $ab + b^2 + ac = d^2$, fiet $uz - d^2 = 0$, ſive $z^2 = d^2$ æquatio reducta.

II. *Præcedentis loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, componendi rationis exempla ſimpliciora.*

551. UT exemplis oſtendamus, qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, componantur loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, proponatur primum con-

conſtruenda æquatio $xy - ax - by - ac = 0$, quæ, ut vidimus paulo ante *, reducitur ad $uz = d^2$, ponendo $y - a = z$, $x - b = u$, & $ab + ac = d^2$. Jamque, ſi AB ſit linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum; fiet ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Unde, quum habeatur $x - b = u$: abſcindendo ex AB portionem AD $= b$, & capiendo quamlibet AN majorem, quam AD, erit unaquæque reliquarum portionum DN $= x - b = u$.

* nr. 549.

FIG. 62.

552. Quia vero habetur quoque $y - a = z$; liquet, valores incognitæ z non aliter haberi poſſe, niſi ſinguli valores ipſius y minuantur data quantitate a. Quare, quum valores incognitæ y correſpondeant portionibus rectæ AB, quæ referunt valores alterius incognitæ x; perſpicuum eſt, quod, abſciſſa ex AC portione AE $= a$, & ducta per punctum E recta EG, ipſi AB parallela, exire debent ex punctis ipſius EG valores incognitæ z. Quumque valores iſti inſiſtant oportet ſuper valoribus alterius incognitæ u: plane neceſſe eſt, ut, non jam ſuper DB, ſed ſuper EG, quæ eſt ei parallela, valores capiantur ipſius u.

553. Hinc, completo parallelogrammo AF, productaque DF verſus H; erit, pro æquatione reducta $uz = d^2$, FG linea abſciſſarum, & FH linea ordinatarum. Unde, ſi, ſumptis ſuper ipſis FG, FH portionibus FI, FK, quarum unaquæque ſit æqualis quantitati d, completoque parallelogrammo alio FL, deſcribatur aſymptotis FG, FH hyperbola, quæ tranſeat per punctum L; fiet hyperbola iſta locus reductæ æquationis $uz = d^2$. Sed eadem hyperbola terminabitur quoque

que

que locus æquationis propoſitæ $xy - ax - by - ac = 0$.

554. Ducatur namque ex puncto N, ipſi AC æquidiſtanter, recta $NM = y$. Jamque, ſi hæc conveniat cum aſymptoto FG in puncto O fiet $OM = y - a$. Eſt autem, propter hyperbolam, rectangulum FOM æquale rectangulo FIL. Quare, quum ſit $FO = x - b$, erit rectangulum quidem $FOM = xy - ax - by + ab$, rectangulum vero $FIL = d^2$: proindeque erit $xy - ax - by + ab = d^2$: quæ, ſicuti evadit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, ponendo loco d^2 valorem ejus $ab + ac$; ita reducta dabit æquationem propoſitam $xy - ax - by - ac = 0$.

555. Verum quidem eſt, demonſtrationem, a nobis allatam, obtinere dumtaxat relate ad eam hyperbolam, quæ continetur in angulo GFH; ſed facile erit, eandem extendere, etiam ad hyperbolam oppoſitam, contentam in angulo, quæ ei ad verticem jacet: modo habeatur ratio ſitus rectarum, quibus pro inventione æquationis opus eſt; ut hinc nullum erit punctum in curva, per quod propoſitæ æquationi non poſſit fieri ſatis. Id vero etiam in ſequentibus exemplis obſervandum eſt; & ſufficiat, ſemel illud adnotaſſe, ne ſæpius idem repetere cogamur.

556. Proponatur ſecundo æquatio $by - ax - xy = 0$, quæ ſimiliter nos ducit ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam. Fiat primo $y + a = z$, ſive $y = z - a$; &, ſubſtitutionis ope, erit $bz - ab - ax - xz + ax = 0$, ſive etiam $bz - xz - ab = 0$. Fiat quoque $b - x = u$. Et quoniam, multipli-

plicando per z, habetur $bz - xz = uz$; erit, rurſus per ſubſtitutionem, $uz - ab = 0$: proindeque erit $uz = ab$ æquatio reducta, quum ſit ejuſdem plane formæ cum æquatione $xz = t^2$, quæ hyperbolæ, relate ad aſymptotos conſideratæ, caſum exhibet ſimpliciſſimum.

557. Sint nunc, pro æquatione propoſita,
FIG. 63. AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Fiet igitur ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Et quoniam habetur $b - x = u$: abſcindendo ex AB portionem AD$=b$, & capiendo quamlibet AN minorem, quam AD; fiet unaquæque reliquarum portionum DN$=b - x = u$. Sed habetur etiam $y + a = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y, qui correſpondent portionibus rectæ AB, augeantur data quantitate a: proindeque, producta CA uſque in E, ita, ut ſit AE$=a$, & acta per punctum E recta FG, ipſi BA parallela; exibunt ex punctis ipſius FG valores incognitæ z.

558. Quum autem valores iſti inſiſtere debeant ſuper valoribus alterius incognitæ u: plane neceſſe, ut non jam ſuper DA, ſed ſuper FG capiantur valores ipſius u. Quare, completo parallelogrammo AF, erit, pro æquatione reducta $uz = ab$, FG linea abſciſſarum, & FD linea ordinatarum. Unde, ſi aſymptotis FG, FD deſcribatur hyperbola, quæ tranſeat per punctum A; fiet hyperbola iſta locus reductæ æquationis $uz = ab$. Sed eadem hyperbola erit etiam terminus loci, quo fieri debet ſatis propoſitæ æquationi $by - ax - xy = 0$.

559. Ducatur namque ex puncto N, ipſi

AC

AC æquidiſtanter, recta NM $= y$. Jamque, ſi hæc conveniat cum aſymptoto FG in puncto O, fiet OM $= y + a$. Sed, propter hyperbolam, rectangulum FOM æquale eſſe debet rectangulo FEA. Itaque, quum ſit FO $= b - x$, & FE $= b$; erit rectangulum quidem FOM $= by - xy + ab - ax$, rectangulum vero FEA $= ab$. Quare erit $by - xy + ab - ax = ab$, quæ reducta dabit æquationem propoſitam $by - xy - ax = 0$.

III. *Ejuſdem loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, componendi rationis exempla magis compoſita.*

560. QUæ modo attulimus exempla, pro explicanda compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, per reductionem æquationum, ad formulam, omnium ſimpliciſſimam, paulo ſimpliciora fuere; nunc alia in medium afferemus magis compoſita. Itaque proponatur ulterius æquatio $ax - x^2 + xy + by - ac = 0$, quæ, ut ſuperius * obſervavimus, reducitur ad $uz = d^2$, ponendo $x + b = u$, $a - u + 2b + y = z$, & $ab + b^2 + ac = d^2$. Jamque, ſi AB ſit linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum; fiet ipſius AB portio quælibet AN $= x$: proindeque, producta BA uſque in D, donec fuerit AD $= b$; erit quælibet DN $= x + b = u$.

*art. 556. FIG. 64.

561. Quum autem habeatur $a - u + 2b + y = z$, hoc eſt $y - u + b + a = z$; liquet, valores ipſius z non aliter haberi poſſe, niſi ſinguli valores incognitæ y minuantur quantitate

va-

variabili x, & augeantur quantitate data $a + b$ Plane vero minuentur valores illi quantitate variabili x, ſi, ducta ad plagam oppoſitam recta DE, parallela ipſi AC, & æquali alteri AD, agatur per punctum A recta EF; augebuntur vero iidem valores data quantitate $a + b$, ſi, producta DE uſque in G, donec fuerit $EG = a + b$, ducatur per punctum G recta GH, ipſi EF parallela. Nam, ducta ex puncto quovis N, æquidiſtanter ipſi AC, recta NO, quæ conveniat cum EF in R, & cum GH in O; fiet $NR = x$, & $RO = a + b$.

562. Hinc, ſicuti centrum deſcribendæ hyperbolæ erit punctum G; ſic aſymptotus, quæ vices geret in æquatione reducta $uz = d^2$ lineæ abſciſſarum, erit recta GH. Et quoniam, poſita $AE = m$, fit quælibet hujus aſymptoti portio $GO = mu : b$; multum abeſt, ut ſit d^2 quantitas conſtans cujuſque rectanguli, quod fit ex abſciſſa in ordinatam correſpondentem. Unde, ſi quantitas illa vocetur q^2, erit $muz : b = q^2$, ſive etiam $uz = bq^2 : m$: & propterea, comparata æquatione iſta cum ipſa æquatione reducta $uz = d^2$, fiet $bq^2 : m = d^2$: unde eruitur $q^2 = d^2 m : b$.

563. Extendatur itaque CA, uſque donec ipſi GH occurrat in I. Jamque, ſi, ſicuti habetur $GI = m$, ita ſuper IC capiatur portio $IL = d^2 : b$; hyperbola, quæ deſcribitur aſymptotis GD, GH, & tranſit per punctum L, fiet ſatis propoſitæ æquationi. Nam, producta NO uſque donec hyperbolæ occurrat in M, poſitaque $NM = y$, fiet $MO = y - x + a + b$. Quum autem habeatur $u = x + b$, ſitque portio $GO = mu : b$;

erit,

erit, per ſubſtitutionem, eadem GO $= mx : b + m$. Unde, quum, propter hyperbolam, æqualia ſint inter ſe, rectangula duo GOM, GIL, erit $mxy : b - mx^2 : b + amx : b + my + am + bm = d^2m : b$, hoc eſt $xy - x^2 + ax + by + ab + b^2 = d^2$, quæ dabit æquationem propoſitam $xy - x^2 + ax + by - ac = 0$, ſi loco d^2 ponatur valor ejus $ab + b^2 + ac$.

564. Proponatur quoque conſtruenda æquatio $xy - x^2 - ay = b^2$, quæ ſimiliter locum exhibet ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam. Fiat $x - a = u$, ſive $x = u + a$. Et, ponendo ubique $u + a$ loco x, erit $uy + ay - u^2 - 2au - a^2 - ay = b^2$, ſive $uy - u^2 - 2au = b^2 + a^2$. Fiat quoque $y - u - 2a = z$. Quumque, multiplicando per u, habeatur $uy - u^2 - 2au = uz$; erit, per ſubſtitutionem, $uz = b^2 + a^2$. Ponatur denique $b^2 + a^2 = c^2$; & fiet $uz = c^2$ æquatio reducta.

565. Sit nunc, pro æquatione propoſita, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Erit ergo ipſius AB portio quælibet AN $= x$. Quumque habeatur $x - a = u$: abſcindendo ex AB portionem AD $= a$, & capiendo quamlibet AN majorem, quam AD, fiet unaquæque reliquarum portionum DN $= x - a = u$. Jam vero habetur quoque $y - u - 2a = z$, hoc eſt $y - x - a = z$. Itaque, ut habeantur valores incognitæ z, neceſſe eſt, ut ſinguli valores ipſius y minuantur, tum quantitate variabili x, cum data quantitate a. FIG. 65.

566. Et quidem minuentur valores illi quantitate variabili x, ſi, ducta ipſi AC æquidiſtan-

ter recta DE, quæ alteri AD ſit æqualis, agatur per punctum E recta AF; minuentur vero iidem valores data quantitate a, ſi, abſciſſa ex DE, ulterius producta verſus K portione EG $= a$, ducatur per punctum G recta GH, ipſi AF parallela. Nam, ſi ex aliquo punctorum N, æquidiſtanter eidem AC, ducatur recta NO, quæ conveniat cum AF in R, & cum GH in O; fiet NR $= x$, & RO $= a$.

567. Quum autem in æquatione reducta $uz = c^2$ ordinatas exhibeant z; erit punctum G centrum deſcribendæ hyperbolæ, & GH aſymptotus, quæ vices geret lineæ abſciſſarum. Et quoniam, poſita AE $= m$, fit quælibet hujus aſymptoti portio GO $= mu : a$; multum abeſt, ut ſit c^2 quantitas conſtans cujuſque rectanguli, quod fit ex abſciſſa in ordinatam correſpondentem. Quare, ſi quantitas illa vocetur q^2, erit $muz : a = q^2$, ſive etiam $uz = aq^2 : m$; proindeque, comparata æquatione iſta cum ipſa æquatione reducta $uz = c^2$, fiet $aq^2 : m = c^2$, & $q^2 = c^2 m : a$.

568. Abſcindatur itaque ex GH portio GI $= m$. Jamque, ſi ducta, ipſi AC æquidiſtanter, recta IL $= c^2 : a$, deſcribatur hyperbola, quæ, tranſiens per punctum L, habeat pro ſuis aſymptotis rectas GH, GK; fiet hyperbola iſta terminus loci quæſiti. Producta enim NO, uſque donec hyperbolæ occurrat in M, poſitaque NM $= y$, erit MO $= y - x - a$. Quum autem habeatur $u = x - a$, ſitque GO $= mu : a$; erit eadem GO $= mx : a - m$; & conſequenter rectangulum GOM $= mxy : a - mx^2 : a - my + am$. Sed, propter hyperbolam, rectangulum

GOM

GOM eſt æquale rectangulo GIL. Quare, quum ſit rectangulum GIL $= c^2m : a$; erit $mxy : a - mx^2 : a - my + am = c^2m : a$, hoc eſt $xy - x^2 - ay + a^2 = c^2$: unde infertur $xy - x^2 - ay = b^2$, ponendo loco c^2 valorem ejus $a^2 + b^2$.

IV. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, per formulam, omnium maxime compoſitam.*

569. Tradita ratione componendi loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam, omnium ſimpliciſſimam; videamus modo, quo pacto eadem loca ad hyperbolam, ſubinde conſideratam, conſtrui debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita: quem in finem, qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

570. Nimirum, referendo hyperbolæ puncta omnia ad rectam, poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint uni ex aſymptotis parallelæ; perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta, poſitione data, ſit aſymptotus altera. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem aſymptoto conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula hyperbolæ, relate ad aſymptotos conſideratæ, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

571. Sit igitur G centrum hyperbolæ, ſintque GH, GK binæ ejus aſymptoti, quarum po- FIG. 66.

 ſte-

ſterior GK deſignet poſitionem ordinatarum. Agatur deinde AE, priori GH parallela; & p aliquod ejus punctum A ducatur quoque obli qua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quod vis D; &, ductis rectis AF, DE, ipſi GK pa rallelis, & convenientibus cum aliis GH, AB in punctis F, & D, ponatur $AD = n$, $DE = m$, $AE = s$, $AF = q$, & $GF = r$. Capiatur porro in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ſuper GH ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AE in R; ponanturque $AN = x$, & $MN = y$.

572. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AD ad DE; erit $NR = mx : n$; adeoque, ob æquales RO, AF; erit $MO = y + mx : n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ſive FO, ut AD ad AE; erit $FO = sx : n$; & conſequenter $GO = r + sx : n$: proindeque erit rectangulum $GOM = ry + mrx : n + qr + sxy : n + msx^2 : n^2 + qsx : n$. Jam vero, propter hyperbolam, rectangulum iſtud debet eſſe ejuſdem ubique magnitudinis. Quare, ſi conſtans ejus magnitudo vocetur t^2, erit $ry + mrx : n + qr + sxy : n + msx^2 : n^2 + qsx : n = t^2$, ſive etiam $xy + mx^2 : n + nry : s + (mr + qs)x : s + (nqr - nt^2) : s = 0$.

573. Hæc igitur eſt æquatio, quæ exhibet nobis formulam hyperbolæ, relate ad aſymptotos conſideratæ, omnium maxime compoſitam. Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formu productum duarum incognitarum xy cum un tantum earum quadrato conjungi; nec quid quam obſtare, quominus quadratum illud in ip ſa formula deficiat, nimirum ſi fuerit $m = 0$.
*art. 547. 548. Unde veritas regulæ, ſuperius * traditæ, pr

co-

cognoſcendis locis ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

574. Qua porro ratione, ope inventæ formulæ generalis, conſtruantur loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, haud arduum erit intelligere. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et, ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ, danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Quod ſi vero earum aliqua oriatur negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

575. Quantitates porro, quæ locum determinant, ſunt m, n, q, r, s, t^2. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum q, r, t^2 valores innoteſcunt. Et quantum ad priores duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum; & tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

576. Determinatis valoribus ipſarum m, & n, etiam quantitatis s valor innoteſcet. In triangulo enim DAE notus eſt angulus ADE, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AD, DE, deſignata per quantitates n, & m, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque tertium latus AE, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius m

 nul-

nullus reperitur ; quandoquidem , evaneſcent DE , cadit AB ſuper AE , & puncta duo D, E coeunt in unum .

577. Quantum ad valorem ipſius t^2, pote ille quandoque negativus oriri . Id vero quum accidit, deſcribenda eſt hyperbola ipſa ad partem alteram aſymptoti GH . Nec obſcura eſt hujus rei ratio . Nam negatio illa, non tam referri debet ad t^2 , quam ad rectangulum GOM . Unde quum ordinata OM capienda ſit ad plagam oppoſitam , omnino neceſſe eſt , ut hyperbola ipſa ad partem alteram cadat . Poteſt etiam valor ipſius t^2 nullus prodire ; & iſto in caſu hyperbola ipſa coincidet cum ſuis aſymptotis , & ad duplicem rectam reducetur.

578. Cæterum , per cognitum valorem ipſius t^2 , definire licebit unum ex punctis, per quod tranſire debet hyperbola ; & conſequenter hyperbolam ipſam omnino determinare . Jam enim aliæ quantitates m, n, q , r, s determinant tum centrum hyperbolæ G , cum ejus aſymptotos GH , GK . Quare , ſi ſuper GH capiatur portio GI cujuſvis longitudinis , puta æqualis ipſi n , tumque per punctum I , ipſi GK æquidiſtanter , ducatur $IL = t^2 : n$; fiet rectangulum $GIL = t^2$: proindeque hyperbola tranſibit per punctum L.

V. *Præcedens loca ad hyperbolam , relate ad aſymptotos conſideratam , componendi ratio exemplis illuſtrata.*

579. UT exemplis notior evadat præcedens loca ad hyperbolam, re-

la-

late ad aſymptotos conſideratam, componendi ratio, proponatur primum conſtruenda æquatio $xy - ax - by - ac = 0$, cui non aliter, quam per hyperbolam, ſubinde conſideratam, fieri debet ſatis. Quia in ea deeſt quadratum x^2; utique fractio $m : n$, per quam illud in formula multiplicatum reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante * notata ſunt, erit $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $xy - ry + qx + (qr - t^2) = 0$. *art.576.

580. Jam, inſtituta comparatione, habebitur $q = -a$, $r = -b$, & $qr - t^2 = -ac$: proindeque, ſicuti $-a$, $-b$ ſunt valores ipſarum q, & r; ita, ſubrogatis valoribus iſtis in tertia æquatione, fiet $ab - t^2 = -ac$, hoc eſt $t^2 = ab + ac$. Hinc, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, componetur locus in hunc modum. Abſcindatur primo ex AC portio AF $= a$; tum ducta FH, ipſi AB parallela, capiatur ſuper ea deorſum verſus portio FG $= b$, perque punctum G, æquidiſtanter ipſi AC, ducatur recta GK. FIG. 67.

581. Sumatur deinde in GH portio quævis GI $= n$, & ducta per punctum I, æquidiſtanter eidem AC, recta IL $= (ab + ac) : n$, deſcribatur hyperbola, quæ, tranſiens per punctum L, habeat pro ſuis aſymptotis rectas GH, GK. Jamque hyperbola iſta terminus erit loci quæſiti. Nec ſane difficile id erit oſtendere. Sumatur enim in ea punctum aliquod M, ex quo demittatur ad aſymptotum GH ordinata MO, quæ extendatur, uſque donec ipſi AB occurrat in N.

582. Poſitis ergo AN, ſive FO $= x$, & NM

$=y$; erit, ex conſtructione, GO $= x - b$, & MO $= y - a$: proindeque erit rectangulum GOM $= xy - ax - by + ab$. Sed, propter hyperbolam, rectangulum GOM eſt æquale rectangulo GIL. Quare, quum ſit rectangulum GIL $= ab + ac$; erit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, hoc eſt $xy - ax - by - ac = 0$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

583. Oporteat etiam, conſtruere æquationem $xy + ay + bx - ax^2 : c + ac = 0$, quæ ſimiliter locum exhibet ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam. Quia hic adeſt quadratum x^2; inſtituta comparatione, habebitur primo $m : n = - a : c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $nr : s = a$, $(mr + qs) : s = b$, & $(nqr - nt^2) : s = ac$.

584. Hinc, in prima harum æquationum ſubrogato valore ipſius n, fiet $cr : s = a$, atque adeo $r = as : c$. Et quoniam ex ſecunda æquatione eruitur $q = b - mr : s$; per ſubſtitutionem, fiet $q = b + a^2 : c$. Quumque demum ex tertia æquatione habeatur $t^2 = qr - acs : n$; ſubſtitutionis ope, fiet etiam $t^2 = abs : c + a^3s : c^2 - as$: adeo nempe, ut, niſi ſit $bc + a^2$ major, quam c^2, valor ipſius t^2 prodibit, vel nullus, vel negativus.

585. Ponamus ergo, $bc + a^2$ majorem eſſe, quam c^2. Et, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, FIG. 68. & AC linea ordinatarum, componetur locus, de quo agitur, in hunc modum. Capiatur in AB portio AD $= c$; & ducta DE $= a$, parallela quidem ipſi AC, ſed ad plagam oppoſitam ei, verſus quam tendit in figura formulæ, jungatur

tur AE. Extendatur, deinde CA uſque in F, donec fuerit AF $= b + a^2 : c$, perque punctum F agatur recta FH, ipſi AE parallela.

586. Porro verſus eandem, quam habet in figura formulæ, plagam, nimirum ſurſum verſus, capiatur ſuper FH portio FG $= as : c$, & ducatur per punctum G recta GK, æquidiſtanter ipſi AC. Denique, ſumpta ſuper GH portione quavis GI $= n$, agatur per punctum I, æquidiſtanter eidem AC, recta IL $= abs : cn + a^3s : c^2n - as : n$. Jamque, ſi aſymptotis GH, GK deſcribatur hyperbola, quæ tranſeat per punctum L; fiet hyperbola iſta terminus loci quæſiti.

587. Ducatur namque ex aliquo ejus puncto M ad aſymptotum GH ordinata MO, quæ occurrat ipſis AB, AE in N, & R, ponanturque AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AD eſt ad DE, ut AN ad NR; erit NR $= ax : c$. Quumque etiam AD ſit ad AE, ut AN ad AR, ſive FO; erit FO $= sx : c$. Unde fiet MO $= y - ax : c + b + a^2 : c$, & GO $= (sx + as) : c$: proindeque erit rectangulum GOM $= sxy : c - asx^2 : c^2 + bsx : c + asy : c + abs : c + a^3s : c^2$.

588. Jam, propter hyperbolam, rectangulum GOM æquale eſſe debet rectangulo GIL. Quare, quum ſit rectangulum GIL $= abs : c + a^3s : c^2 - as$; erit $sxy : c - asx^2 : c^2 + bsx : c + asy : c + abs : c + a^3s : c^2 = abs : c + a^3s : c^2 - as$: quæ, ſicuti, deletis terminis, qui ſe mutuo deſtruunt, reducitur ad $sxy : c - asx^2 : c^2 + bsx : c + asy : c + s = 0$; ita, multiplicando terminos omnes per c, eoſdemque dividendo per s, dabit nobis æquationem propoſitam $xy - ax^2 : c + bx + ay + ac = 0$.

589.

589. In allato igitur exemplo, ut valor ipſius t^2 poſitivus evadat, neceſſe eſt, ut $bc + a^2$ major ſit, quam c^2. Sed ſi fuerit $bc + a^2$ minor, quam c^2; tunc idem ille valor prodibit negativus. In iſto autem caſu, ut ſupra * monuimus, deſcribenda eſt hyperbola ad partem alteram aſymptoti GH : quem in finem ipſa IL ducenda eſt ad plagam oppoſitam, & poni debet eadem IL $= as:n - abs:cn - a^3s:c^2n$. Nec difficile id erit oſtendere.

* Art. 577.

FIG. 69.

590. Nam, ducta adhuc ex aliquo hyperbolæ puncto M ad aſymptotum GH ordinata MO, conveniente cum AB in N, & cum AE in R; poni debet AN $= x$, & NM $= -y$. Unde, quum fiat MO $= -y + ax:c - b - a^2x$, & GO $= (sx + as):c$, erit rectangulum GOM $= -sxy:c + asx^2:c^2 - bsx:c - asy:c - abs:c - a^3s:c^2$; adeoque, ob æqualitatem rectangulorum GOM, GIL, habebitur æquatio $-sxy:c + asx^2:c^2 - bsx:c - asy:c - abs:c - a^3s:c^2 = as - abs:c - a^3s:c^2$: unde rurſus infertur $xy - ax^2:c + bx + ay + ac = 0$.

591. Fieri etiam poteſt, ut ſit $bc + a^2 = c^2$; & tunc hyperbola cum ſuis aſymptotis confundetur. Id vero ut oſtendamus, ponatur in æquatione conſtruenda $xy - ax^2:c + bx + ay + ac = 0$, loco b valor ejus $c - a^2:c$; & mutabitur ea in hanc aliam $xy - ax^2:c + cx - a^2x:c + ay + ac = 0$. Quumque æquatio iſta dividi poſſit per binomium $x + a$, & ex diviſione ejus oriatur quotiens $y - ax:c + c$; liquet, eandem componi ex duabus hiſce æquationibus primi gradus $y - ax:c + c = 0$, & $x + a = 0$.

592. Jam primæ harum æquationum fit ſa-

tis

tis per aſymptotum GH. Manentibus enim omnibus, ut ſupra, invenietur ſemper NR FIG. 68. $= ax : c$. Unde, quum ſit AF, ſive RO $= b + a^2 : c = c$, erit NO $= ax : c - c$: proindeque, poſita eadem NO $= y$, erit $ax : c - c = y$. ſive $y - ax : c + c = 0$. Quod vero ſecundæ æquationi ſatisfaciat aſymptotus altera HK, id liquet ex eo, quod, producta BA, uſque donec ipſi GK occurrat in Q, fit AQ $= a$; quum ſit, ut AE ad AD, ita FG ad AQ; hoc eſt, ut s ad c, ita $as : c$ ad ipſam AQ.

VI. *Monita circa compoſitionem locorum ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam.*

593. Quemadmodum in æquationibus localibus, quæ nos ducunt ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, aſſumpſimus ſemper x, & y pro duabus earum incognitis; ita in earundem compoſitione illud perpetuo curavimus, ut abſciſſæ quidem AN, capiendæ ſuper AB, deſignarent valores incognitæ x; ordinatæ vero NM, ducendæ æquidiſtanter alteri AC, repræſentarent valores alterius incognitæ y.

594. Sed notari hic ſedulo debet, quod, exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poteſt, ut deſignari debeant, per abſciſſas quidem AN valores incognitæ y, per ordinatas vero NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane difficile erit definire, quando demum id fieri debeat: nimirum, quum in æquatione propoſita una cum producto

ĉto duarum incognitarum reperitur quadratum incognitæ y. Sic æquatio $xy + y^2 - ay - ac = 0$ mutationem illam expoſcit, quia quadratum incognitæ y illud eſt, quod in ea conjunctum reperitur cum producto ambarum incognitarum xy.

595. Interim, quum conſtruitur æquatio aliqua, per reductionem ejus ad formulam, omnium maxime compoſitam, eademque natura ſua exigit eam variationem; neceſſe eſt, ut etiam in formula incognitæ varientur: adeo nempe, ut ſcribere oportebit incognitam x loco alterius y, & viciſſim incognitam y loco alterius x. Hac ratione æquatio $xy + y^2 - ay - ac = 0$, ob quadratum y^2, quod conjunctum reperitur cum producto xy, exigit eam mutationem. Plane vero formula, cum qua comparanda eſt illiuſmodi æquatio, haud quidem eſſe debet $xy + mx^2 : n + nry : s + (mr + qs)x : s + (nqr - nt^2) : s = 0$, ſed $xy + my^2 : n + nrx : s + (mr + qs)y : s + (nqr - nt^2) : s = 0$.

596. Eſſe autem omnino neceſſariam variationem iſtam, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam, omnium maxime compoſitam; id liquet abunde. Sed eadem neceſſitas non ita liquido apparet, quum conſtructio fit per reductionem æquationis ad formulam, omnium ſimpliciſſimam. Conſtabit id autem, ſi ipſius æquationis $xy + y^2 - ay - ac = 0$ reductio inſtituatur.

597. Nimirum, pro ea reducenda, ponendum eſt $x + y - a = u$. Ita enim erit $xy + y^2 - ay = uy$; atque adeo, per ſubſtitutionem, fiet $uy - ac = 0$, ſive $uy = ac$ æquatio reducta.

cta. Deſignatis autem valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, liquet, valores incognitæ u non aliter haberi poſſe, quam delendo ex eis conſtantem a, & addendo iiſdem variabilem y. Horum ergo poſtremum quum fieri nullo pacto poſſit; hinc eſt, ut per portiones AN rectæ AB deſignandi ſint valores incognitæ y, & non jam incognitæ x.

598. Illud quoque notari hic ſedulo debet, quod, ubi in æquatione una cum producto incognitarum reperitur quadratum unius ex iis; tunc locus explicari poteſt etiam per hyperbolam, relate ad diametrorum aliquam conſideratam. Ita in eadem æquatione $xy + y^2 - ay - ac = 0$, ſi ponatur $y + x:2 - a:2 = z$, & $x - a = u$, habebitur loco ejus hæc alia $4z^2 = u^2 + 4ac$, quæ nos ducit ad hyperbolam, relate ad aliquam ex ſuis diametris conſideratam.

599. Et quidem jam vidimus ſupra *, quod, ubi in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiuntur, locus eſt ad hyperbolam, conſideratam in ordine ad ſuas diametros, quotieſcumque quadrata earundem incognitarum ita quidem in æquatione continentur, ut, translatis ad eandem partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, & liberato quadratorum uno ab omni coefficiente, debeat coefficiens alterius quadrati augeri nonnihil, quo omnes ii termini quadratum perfectum exhibeant. * art. 463.

600. Plane vero, quotieſcumque in æquatione una cum producto incognitarum conjungitur quadratum unius ex iis, tunc nihil vetat, alterius quoque quadratum in ea conſiderare;

quum

quum ſatis ſit, ei præfigere zero, ſeu nihilum, velut coefficientem. Unde, quia, liberato priore quadrato ſuo coefficiente, debet coefficiens alterius hujus quadrati ſemper augeri, quo idem una cum quadrato priore, & producto incognitarum quadratum perfectum exhibeat; poterit etiam per hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, æquatio ipſa explicari.

601. Denique, notabimus, hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, cenſendam eſſe æquilateram, ubi angulus, quem aſymptoti continent, fuerit rectus. Si enim circa duos axes
FIG. 22. hyperbolæ AB, KL parallelogrammum deſcri-
*art.218. batur EFGH; jam vidimus ſupra *, diagonales parallelogrammi hujus EG, FH aſymptotos eſſe ipſius hyperbolæ. Plane vero, ſicuti hyperbola evadit æquilatera, ubi duo axes AB, KL inter ſe ſunt æquales; ita aſymptoti EG, FH ſecabuntur ad angulos rectos, eadem axium æqualitate ſuppoſita.

602. Nam ſemper ac AB æqualis ponitur ipſi KL, ſive EH; erit etiam AC æqualis utrique ipſarum AE, AH. Unde, quum iſoſceles fiat utrumque triangulorum CAE, CAH; erit, tam angulus ACE æqualis angulo AEC, quam angulus ACH æqualis angulo AHC: proindeque, quum totus angulus ECH æqualis oriatur duobus angulis AEC, AHC ſimul ſumptis; rectus erit ipſe angulus ECH. Eadem autem ratione oſtendemus, eundem angulum ECH eſſe obtuſum, vel acutum, prout AB minor, aut major eſt, quam KL. Unde ipſa hyperbola neceſſario æquilatera eſſe debet, quum angulus, ſub aſymptotis contentus, extiterit rectus.

SE-

SECTIO III.

De Linearum Cujuſque Ordinis Theoria Generali.

603. HActenus ea proſecuti ſumus, quæ circa loca primi, & ſecundi generis paſſim tradi ſolent. Nunc ad loca altiorum generum ita quidem ſermonem convertemus, ut, non jam ſingula locorum genera ſeorſim a nobis ſint expendenda, ſed tantum generalem loca cujuſque generis inveſtigandi rationem in medium afferre debeamus. Neque enim de ſingulis locorum generibus peculiaris ſermo inſtitui poteſt. Nam, ut vidimus ſupra *, genera locorum abeunt in infinitum; eademque, uti altius aſſurgunt, ita mirum quidem in modum in ſpecies ſubdividuntur. *Art. 449.*

604. Quemadmodum autem conjicere licet ex iis, quæ huc uſque dicta ſunt de locis primi, & ſecundi generis; id, quod hac in re caput eſt, huc quidem redit, ut lineæ, quibus loca cujuſque generis terminantur, perſpectæ nobis evadant. Iis etenim cognitis, ac exploratis, ipſa eorum locorum compoſitio nullam ſane difficultatem involvet: ut quæ, ad inſtar locorum primi, & ſecundi generis, componere licebit; vel per formulas, omnium ſimpliciſſimas earum linearum; vel etiam advocatis in ſubſidium formulis, quæ ſint maxime omnium compoſitæ.

605. Id vero quum ita ſit, non aliud a nobis

bis præſtandum hoc loco erit, quam ut linearum cujuſcumque ordinis generalem theoriam exhibeamus. Dabimus autem operam, ut res ex voto ſuccedat, hoc eſt, ut in tanta argumenti hujus univerſalitate ordo, ac perſpicuitas non deſint. Unde exempla ſpecialia, pro clariore theoriæ hujus intellectu, non aliunde mutuabimur, quam ex lineis primi, & ſecundi ordinis, quarum theoria ſpecialis jam ſatis ſuperque nobis eſt cognita.

C A P U T I.

Linearum cujuſque ordinis formulæ, ſive æquationes generales.

*art. 13. 23. 606. Vidimus ſuperius *, lineas omnes, prout a Geometris conſiderantur, non aliud eſſe, quam ſeries punctorum, quibus alicui problemati geometrico, indeterminate propoſito, ſatisfieri poteſt; earundemque naturam non melius poſſe definiri, quam referendo cujuſque puncta omnia ad puncta alia rectæ, poſitione datæ, per totidem rectas parallelas, & inveniendo æquationem, quæ relationem illam nobis oſtendat.

607. Jam, ſicuti rectas illas parallelas vocavimus *ordinatas, nec non abſciſſas portiones rectæ, poſitione datæ, quibus ordinatæ correſpondent; ita diximus *, omnem linearum molem poſſe in ordines diſtingui, ſecundum numerum dimenſionum, ad quas habita, tum abſciſſæ, cum ordinatæ ratione, earum æquationes aſcendunt.

*art. 27. *art. 40.

Sed

Sed monuimus quoque *, quod, ſi primum ordinem excipias, in quo recta ſola continetur, omnes alii ordines varias ſub ſe lineas comprehendunt, quæ per ſuas æquationes proprias, ac ſpeciales a ſe mutuo diſtinguuntur. *ar. 50.

608. Etſi autem, priore excepto, quilibet alius ordo varias ſub ſe lineas complectatur; licebit tamen, omnes cujuſcumqne ordinis lineas ſub generali quadam æquatione comprehendere. Æquationes iſtæ generales erunt nobis, veluti formulæ linearum, quæ ordines conſtituunt. Quumque eædem ſint eximii uſus, pro rimandis ipſarum linearum, tum affectionibus, cum ſpeciebus; non aliunde, quam a formulis iſtis, generalem linearum theoriam ordiemur.

I. *Ratio conficiendi formulas linearum cujuſcumque ordinis.*

609. Cujuſcumque ordinis ſit linea, de qua agitur, æquatio ejus exhibere nobis debet relationem, quam habent ordinatæ ad abſciſſas ſuas correſpondentes. Vocando autem y quamlibet ordinatarum, & x quamlibet abſciſſarum; habenda eſt, tum x, cum y velut æquationis incognita: & ea propter gradus ipſius æquationis, ut jam dictum eſt *, habita utriuſque incognitæ ratione, debet æſtimari: adeo nempe, ut, ſi in termino aliquo ſimul multiplicatæ reperiantur, dimenſiones termini ejus ab utraque conjunctim ſint repetendæ. *art. 40. 607.

610. Id vero quum ita ſit, perſpicuum eſt, quod, ſicuti in æquationibus linearum primi ordinis, tam x, quam y debet eſſe unius dimen-

ſionis, ita productum xy nequit in iis reperiri; quia aliter æquationes forent ſecundi gradus, atque adeo lineæ ipſæ ad ſecundum ordinem pertinerent. Eadem autem ratione in æquationibus linearum ſecundi ordinis neceſſe quidem eſt, ut aliqua ſaltem harum quantitatum y^2, xy, x^2 occurrat; ſed nec xy^2, nec x^2y poteſt in iiſdem reperiri, quia aliter æquationes forent tertii gradus, & conſequenter lineæ ipſæ ad tertium ordinem ſpectarent.

611. Sed, his ita ſe habentibus, patet etiam, fieri formulas linearum ordinum omnium, aſſumendo, tum omnes poteſtates, cum omnia producta incognitarum x, & y, quæ in æquationibus earum linearum poſſunt reperiri; & præbendo iis coefficientes indeterminatos a, b, c, d, e, f, g, h, i, &c. Interim, præter terminos iſtos, neceſſe eſt quoque, terminum alium omnino notum apponere: ut qui una cum iis poteſt etiam in iiſdem æquationibus occurrere.

612. Hac ratione in æquationibus linearum primi ordinis dumtaxat primæ poteſtates ipſarum x, & y poſſunt reperiri. Unde formula talium linearum erit $hy + ix + k = 0$. In æquationibus autem linearum ſecundi ordinis occurrere poſſunt, non modo primæ, & ſecundæ poteſtates earum incognitarum, verum etiam productum ex iis xy. Quare formula iſtiuſmodi linearum erit $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$.

613. Simili ratione in æquationibus linearum tertii ordinis adeſſe poſſunt, non modo primæ, ſecundæ, & tertiæ poteſtates incognitarum x, & y; verum etiam omnia iſta producta xy^2, x^2y, xy. Quare, pro lineis tertii ordinis,

for-

formula erit $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Neque aliter cudere licebit formulas, ſive æquationes generales, pro lineis ordinum ſuperiorum.

614. Perſpicuum eſt autem, ſub formula linearum unius ordinis omnes illas contineri, quæ ad lineas ordinum inferiorum referuntur. Ita, ſi in formula linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ ponantur nihilo æquales coefficientes a, b, c, d, remanebit $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, quæ eſt * formula linearum ordinis ſecundi. Etſi adhuc in iſta ponantur nihilo æquales coefficientes e, f, g, habebitur $hy + ix + k = 0$, quæ eſt * formula linearum ordinis primi. *art. 612. *art. 612.

615. Perſpicuum eſt quoque, in formula linearum cujuſque ordinis multitudinem terminorum deſignari per ſummam tot numerorum naturalium, ab unitate ſe conſequentium, quot exhibet ordo ipſe, auctus unitate. Sic in formula linearum primi ordinis tres termini continentur: & profecto 1 + 2 eſt 3. Similiter in formula linearum ſecundi ordinis adſunt ſex termini: plane vero 1 + 2 + 3 eſt 6. Atque ita quoque in formula linearum tertii ordinis occurrunt decem termini; ſumma autem 1 + 2 + 3 + 4 tantundem valet, ac 10.

616. Ad eundem itaque modum, quia 1 + 2 + 3 + 4 + 5 eſt 15, continebuntur quindecim termini in formula linearum quarti ordinis. Pariterque, quia 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 eſt 21, erit unius ſupra viginti multitudo terminorum, quos continet formula linearum quinti ordinis. Neque aliter determinare licebit multitudinem

terminorum, qui in formula linearum cujuſvis alterius ordinis debent contineri.

617. Generaliter autem, vocando n exponentem ordinis, fiet $(n^2 + 3n + 2) : 2$ multitudo terminorum, qui in formula linearum ejus ordinis continentur. Nam, ad habendam eam multitudinem, oportebit, in unum addere tot numeros naturales, ab unitate ſe conſequentes, quot deſignat $n + 1$. Unde, per ea, quæ alibi * oſtenſa ſunt, ſi multiplicetur $n + 1$ per $n + 2$, & producti $n^2 + 3n + 2$ capiatur ſemiſſis; fiet ſemiſſis iſta multitudo quæſita.

* art. 594. lib. 1.

618. Unde autem fiat, ut multitudo terminorum, qui continentur in formula linearum cujuſque ordinis, deſignari debeat per ſummam tot numerorum naturalium, ab unitate ſe conſequentium, quot exhibet ordo ipſe, auctus unitate; haud difficile erit intelligere. Sicuti enim, pro formula linearum primi ordinis, termino plane noto adjiciendæ ſunt partes radicis binomiæ $y + x$; ita apponere oportebit, partes quoque quadrati ejuſdem radicis, pro formula linearum ſecundi ordinis; partes itidem cubi, pro formula linearum ordinis tertii; partes inſuper quadrato quadrati, pro formula linearum ordinis quarti; atque ita deinceps.

619. Jam, ſicuti in radice binomia $y + x$ duæ ſunt partes y, & x; ita notum eſt, adeſſe tres partes y^2, xy, x^2 in ejus quadrato; quatuor y^3, xy^2, x^2y, x^3 in cubo; quinque y^4, xy^3, x^2y^2, x^3y, x^4 in quadrato-quadrato; atque ita in infinitum. Unde plane neceſſe eſt, ut multitudo terminorum, ſicuti eſt $1 + 2$ in formula linearum primi ordinis, ita ſit $1 + 2 + 3$ in formu-

la linearum ſecundi ordinis, $1 + 2 + 3 + 4$ in formula linearum ordinis tertii, $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ in formula linearum ordinis quarti, atque ita de aliis.

II. *De numero punctorum, per quæ linea cujuſque ordinis tranſire poteſt.*

620. Ex iis, quæ modo dicta ſunt, de conficiendis formulis linearum cujuſcumque ordinis, & de multitudine terminorum, qui in formulis illis continentur, facile erit intelligere, per quot puncta data tranſire poſſit linea, quæ ad datum aliquem ordinem pertinet. Quum enim, per data illa puncta, ſuam ſubeant determinationem coefficientes indeterminati, qui in formula dati ejus ordinis continentur; utique per tot puncta data, & non plura, tranſire poterit linea alicujus ordinis dati, quot indeterminati coefficientes occurrunt in ejus ordinis formula.

621. Hinc conſtabit nobis numerus punctorum, per quæ linea cujuſque ordinis tranſire poteſt, ubi notus nobis evadet numerus coefficientium indeterminatorum, qui in formula ejus ordinis occurrunt. Id vero ex ipſa terminorum multitudine, qui in formula illa continentur, repeti debet. Nam generaliter in qualibet formula tot dantur coefficientes indeterminati, & non plures, quota eſt ipſa ſuorum terminorum multitudo, unitate minuta. Unde etiam linea cujuſque ordinis per tot puncta data traduci poterit, & non plura, quot exhibet numerus terminorum, qui in formula ejus ordi-

nis continentur, unitate minutus.

622. Quum igitur in formula linearum primi ordinis tres tantum termini reperiantur; per duo data puncta, & non plura, tranſire poterit linea ordinis primi. Pariterque, quia in formula linearum ſecundi ordinis ſex tantummodo termini dantur; per quinque data puncta, & non plura, traducere licebit lineam ordinis ſecundi. Atque ita quoque, quia in formula linearum tertii ordinis dumtaxat decem termini continentur; per novem data puncta, & non plura, linea ordinis tertii poterit tranſire.

623. Generaliter autem, vocando n exponentem ordinis, fiet $(n^2 + 3n) : 2$ numerus punctorum, per quæ linea ejus ordinis traduci po-
*art.617. terit. Ut enim ſuperius * vidimus, multitudo terminorum, qui continentur in formula linearum ejus ordinis, cujus exponens eſt n, exhibetur per $(n^2 + 3n + 2) : 2$. Quare, ſicuti eadem multitudo, unitate minuta, eſt $(n^2 + 3n) : 2$; ita pariter erit $(n^2 + 3n) : 2$ numerus punctorum, per quæ poterit tranſire linea, quæ ad eundem ordinem pertinet.

624. Cæterum quia in conficiendis formulis linearum cujuſque ordinis cuilibet termino ſuum coefficientem adſcripſimus, difficultatem
*art.621. facere poteſt, quod modo * diximus, in qualibet formula tot dari coefficientes indeterminatos, & non plures, quota eſt ipſa ſuorum terminorum multitudo, unitate minuta. Ex ea enim formulas conficiendi ratione videtur, coefficientes indeterminatos in qualibet formula tot quidem eſſe debere, quot termini in eadem formula continentur. Quod ſane ſi verum erit, etiam nume-

merus punctorum, per quæ linea alicujus ordinis tranſire poteſt, eidem terminorum multitudini adamuſſim correſpondebit.

625. Ut igitur difficultati huic occurramus, notetur hoc loco velim, quod, etſi in conficiendis formulis linearum cujuſque ordinis quilibet terminus ſuo coefficiente fuerit affectus; attamen, diviſionis ope, ſemper fieri poteſt, ut unus ex terminis maneat omni omnino coefficiente denudatus. Unde, quum, diviſione iſta, eliminare ſemper liceat ex formulis unum ex coefficientibus, quos ſingulis ipſarum terminis appoſuimus; hinc eſt, ut in qualibet formula tot præciſe dentur coefficientes indeterminati, & non plures, quota eſt ipſa ſuorum terminorum multitudo, unitate minuta.

626. Hac ratione, etſi formula linearum primi ordinis ſit * $by + ix + k = 0$; dividendo tamen per b, habebitur loco ejus hæc alia $y + ix : b + k : b = 0$, ſive etiam $y + mx + n = 0$: ubi nonniſi duo coefficientes exiſtunt. Atque ita quoque, tametſi formula linearum ſecundi ordinis ſit * $ey^2 + fxy + gx^2 + by + ix + k = 0$; dividendo nihilominus per e, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 + fxy : e + gx^2 : e + by : e + ix : e : + k : e = 0$, ſive etiam $y^2 + mxy + nx^2 + py + qx + r = 0$: ubi quinque tantum coefficientes occurrunt.

* art. 612.

* ar. 612.

627. Neque vero vitio nobis verti debet, quod in conficiendis formulis linearum cujuſque ordinis cuilibet termino ſuum coefficientem adſcripſimus. Ad illud namque efficiendum hoc potiſſimum nos movit, ut, quum opus eſſet, quemlibet terminum ex ipſis formulis eliminare

liceret. Neque enim, ad id obtinendum, aliud quidpiam fieri debet, quam nihilo æqualem ſupponere coefficientem, quo eliminandus terminus afficitur. Quod ſane non foret ita facile factu, ſi terminus, quem eliminare oportebit, omni prorſus coefficiente eſſet denudatus.

628. Ita, quum aſſumitur $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ pro formula linearum ſecundi ordinis, & ex ea eliminandus eſt terminus, in quo quadratum y^2 reperitur; id factu quidem eſt facile, quum ſatis ſit, nihilo æqualem ſupponere coefficientem e, quo quadratum iſtud afficitur. Verum, ſi formula earundem linearum ſit $y^2 + mxy + nx^2 + py + qx + r = 0$, & ex iſta eliminandus ſit terminus y^2; primo quidem oportebit, coefficientes aliorum terminorum ad fractiones ejuſdem nominis reducere, tum communem earum fractionum denominatorem zero æqualem aſſumere.

III. *Theoriæ præcedentis plenior explicatio, duobus exemplis adhibitis.*

*art. 621. 629. Diximus *, lineam cujuſque ordinis per tot puncta data tranſire poſſe, & non plura, quota eſt multitudo terminorum, qui in formula ejus ordinis continentur, unitate minuta. Id vero ex duplici principio potiſſimum deduximus. Primo, quod per data illa puncta ſuam ſubeunt determinationem coefficientes indeterminati, qui in eadem formula occurrunt. Et ſecundo, quod in qualibet formula tot præciſe dantur coefficientes indeterminati, quotus eſt numerus ſuorum ter-

mi-

minorum, unitate minutus.

630. Jam horum poſtremum nullam amplius patitur difficultatem. Unde, ad pleniorem theoriæ præcedentis explicationem, ad rem erit, prioris principii veritatem paucis oſtendere. Id autem præſtabimus, duobus exemplis adhibitis; in quorum uno oſtendemus, quomodo per duo data puncta ducenda ſit linea primi ordinis; in altero, qua ratione per quinque puncta data duci debeat linea ordinis ſecundi. Utroque etenim exemplo, non modo nota nobis evadet methodus generalis ſolvendi hujuſmodi problemata; ſed liquido etiam patebit, per data illa puncta ſuam ſubire determinationem coefficientes indeterminatos, qui in formula ducendæ lineæ occurrunt.

631. Dentur itaque primum puncta duo D, & F; & oporteat, per duo iſta puncta data ducere lineam ordinis primi. Aſſumatur AB velut linea abſciſſarum, & AC velut linea ordinatarum. Tum, demiſſis ſuper AB, ipſi AC æquidiſtanter, rectis DE, FG, ponantur AE $= a$, DE $= b$, AG $= c$, & FG $= d$. Ut ergo, poſitis abſciſſa quavis AN $= x$, & ordinata correſpondente MN $= y$, fit * $y + mx + n = 0$ formula linearum primi ordinis; ita formula iſta evadet $b + am + n = 0$, quum punctum M incidit in D; & $d + cm + n = 0$, quum idem punctum M incidit in F. Quum autem ex his eruatur, tum $b + am = -n$, cum $d + cm = -n$; erit $b + am = d + cm$, ſive etiam $b - d = cm - am$: proindeque, quum fiat $m = (b - d) : (c - a)$, erit $n = (ad - bc) : (c - a)$.

FIG. 70.

* ar. 626.

632. Per duo igitur data puncta D, & F, li-

liquet, utrumque ex coefficientibus m, & n ſuam determinationem ſubire. Quia vero, ſubſtitutis loco eorum valoribus inventis, formula ipſa $y + mx + n = o$ evadit $y + (b - d)x : (c - a) + (ad - bc) : (c - a) = o$; hæc erit æquatio propria lineæ ducendæ. Quare per duo data puncta D, & F ducetur linea ordinis primi, ſi ita quidem conſtruatur æquatio $y + (b - d)x : (c - a) + (ad - bc) : (c - a) = o$, ut pro ea ſit AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Interim facilius longe idem problema ſolvetur, ſi unum ex punctis datis capiatur velut origo abſciſſarum; quum hac ratione æquatio ducendæ lineæ longe ſimplicior oriatur.

633. Hunc in finem ſint A, & D duo puncta data. Ducantur ex altero ipſorum A binæ rectæ AB, AC, quarum prior aſſumatur pro linea abſciſſarum, altera pro linea ordinatarum. Tum, demiſſa ſuper AB recta DE, ipſi AC parallela, ponantur,
*art. 631. ut antea *, AE $= a$, & DE $= b$. Poſitis ergo abſciſſa quavis AN $= x$, & ordinata correſpondente
*art. 626. MN $= y$, fit * rurſus $y + mx + n = o$ formula linearum ordinis primi. Hæc autem, ſicuti evadit $b + am + n = o$, quum punctum M incidit in D; ita dabit $n = o$, quum idem punctum M incidit in A. Unde, quum fiat etiam $b + am = o$, erit $m = - b : a$; proindeque, poſitis in formula loco m, & n valoribus inventis, habebitur loco ejus hæc alia $y - bx : a = o$, quæ erit ducendæ lineæ æquatio propria.

634. Dentur ſecundo quinque puncta A, D, B, F, G; & oporteat, per quinque iſta puncta da-
FIG. 71. ta lineam ducere ordinis ſecundi. Jungantur duo quævis ex iis A, & B per rectam AB; tum

per

per punctum A ducatur recta AC, æquidiſtanter ipſi DF, quæ duo quævis alia D, & F conjungit. Capiatur porro AB velut linea abſciſſarum, & AC velut linea ordinatarum; demiſſaque ſuper AB recta GH ipſi AC parallela, ponantur AE $= a$, DE $= b$, FE $= c$, AH $= d$, GH $= e$, & AB $= f$. Jamque, poſitis abſciſſa quavis AN $= x$, & ordinata correſpondente MN $= y$, fiet* $y^2 + mxy + nx^2 + py + qx + r = 0$ formula linearum ſecundi ordinis. *art. 626.

635. Plane vero formula iſta, ſicuti dat $r = 0$, ubi punctum M incidit in A; ita, incidente eodem puncto M ſucceſſive in D, F, G, B, dabit $b^2 + abm + a^2n + bp + aq + r = 0$, $c^2 + acm + a^2n + cp + aq + r = 0$, $e^2 + dem + d^2n + ep + dq + r = 0$, & $f^2n + fq + r = 0$. Quum ergo ſit $r = 0$; erit etiam $b^2 + abm + a^2n + bp + aq = 0$, $c^2 + acm + a^2n + cp + aq = 0$, $e^2 + dem + d^2n + ep + dq = 0$, & $fn + q = 0$. Sed, quemadmodum ex harum æquationum poſtrema eruitur $q = -fn$; ita inferre licebit ex tertia $p = (dfn - e^2 - dem - d^2n) : e$, ex ſecunda $n = (c^2e - ce^2 + acem - cdem) : (cd^2 + aef - a^2e - cdf)$, & ex prima talem valorem ipſius m, qui rationalis ſit, & ſolas datas quantitates a, b, c, d, e, f includat.

636. Hinc, regrediendo, licebit etiam invenire conſimilem valorem pro unoquoque aliorum coefficientium n, p, q; adeoque, per data quinque puncta A, D, B, F, G ſinguli coefficientes indeterminati m, n, p, q, r, qui in formula linearum ſecundi ordinis continentur, ſuam determinationem ſubibunt. Unde, quia, ſubſtitutis loco eorum coefficientium valoribus inventis,

tis, ipſa etiam formula ſuam ſubit determinationem; jam habebitur æquatio propria lineæ, ducendæ per quinque illa data puncta A, D, B, F, G: & propterea ducetur per ea linea ordinis ſecundi, ſi comperta æquatio ita quidem conſtruatur, ut pro ea ſit AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum.

IV. *Ejuſdem theoriæ limitatio pro ſpeciebus linearum cujuſque ordinis.*

637. Etſi lineam cujuſque ordinis per tot data puncta, & non plura, traducere liceat, quota eſt multitudo terminorum, qui in formula ejus ordinis continentur, unitate minuta; id tamen, non de ſingulis linearum ſpeciebus, quæ eo ſub ordine continentur, intelligi debet; ſed tantum de iis, quas exhibet ipſa ordinis formula, ubi in ea coefficientes terminorum per relationes, quas ſubeunt, ſejuncti manent a ſe invicem, nec unus ex altero pendet. Quod ut rectius intelligatur, præſtat, rem paulo altius repetere, & paucis prius aperire, quomodo formula generalis cujuſque ordinis omnes ejus ordinis linearum ſpecies nobis exhibeat.

638. Nimirum, quicumque ſit ordo linearum, jam quidem curavimus, ut ejus formula generalis terminos omnes complectatur, qui in ea poſſunt occurrere, & ut quilibet terminus ſuo etiam coefficiente afficiatur. Plane vero, ſicuti coefficientes iſtos, ad conciliandam formulæ univerſalitatem, indeterminatos aſſumpſimus; ita, pro variis relationibus, quas iidem coefficientes habere poſſunt inter ſe, fit, ut ea-

dem

dem formula varias linearum ſpecies poſſit exhibere, & propria evadat cujuſque ſpeciei, quum coefficientes illi ſubeunt eas relationes, quas ſpeciei, de qua agitur, natura requirit.

639. Jam iſtæ relationes interdum poſſunt eſſe tales, ut, etiamſi eas ſubeant coefficientes, adhuc tamen in formula maneant a ſe invicem ſejuncti, nec unus ex altero pendeat; quandoque vero tales deprehenduntur, ut, iis coefficientibus adſcriptis, nexus quidam inter aliquos eorum inducatur, & per unius determinationem alii etiam, qui ex eo dependent, ſuas determinationes nanciſcantur. Unde plane neceſſe eſt, ut non omnes ſpecies linearum, quæ ſub aliquo ordine includuntur, per tot data puncta tranſire poſſint, quota eſt multitudo terminorum, qui in formula ejus ordinis continentur, unitate minuta.

640. Neque enim aliunde id evenire vidimus, quam quia, ſicuti in formula generali, omnes linearum ſpecies exhibente, tot præciſe dantur coefficientes indeterminati, quota eſt multitudo terminorum, unitate minuta; ita ſinguli illi coefficientes ſuas ex datis punctis determinationes nanciſcuntur. Quare, per totidem data puncta, traducere quidem licebit eas linearum ſpecies, pro quibus ii coefficientes ſejuncti manent a ſe invicem, nec unus ex altero pendet; ſed non item ſpecies illas, pro quibus nexus quidam inter aliquos coefficientium inducitur, & per unius determinationem alii etiam, qui ex eo dependent, ſuas determinationes acquirunt.

641. Verum, ut hæc omnia, adhibito exemplo,

plo, clariora evadant, capiatur formula linearum
art.612. ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix +$
*art.626. $k = 0$, ſive potius * $y^2 + mxy + nx^2 + py + qx$
$+ r = 0$. Sane formula iſta tres nobis exhibet
linearum ſpecies parabolam, hyperbolam, & ellipſim. Ut autem vidimus ſuperius, exhibet nobis
art.332. ſpeciatim parabolam, quum habetur $n = m^2 :$
4; exhibet ſpeciatim hyperbolam, quum n mi-
art.463 nor eſt, quam $m^2 : 4$; ac denique exhibet ſpe-
art.394. ciatim ellipſim quum viciſſim n major eſt, quam
$m^2 : 4$. Unde pro hyperbola, & ellipſi manent quidem coefficientes ſejuncti a ſe invicem, nec unus ab altero pendet; ſed non item pro parabola, quum in iſta coefficiens n a definito valore ipſius m ſuam determinationem mutuetur.

642. Id ergo quum ita ſit, conſequens eſt, ut ex lineis ſecundi ordinis tantum hyperbolam, & ellipſim per quinque data puncta traducere liceat. Nam, ſicuti in ipſarum æquationibus generalibus quinque coefficientes continentur; ita, quum ſint a ſe mutuo ſejuncti, nec unus cum alio habeat nexum ullum, poterunt ſinguli ab ipſis punctis datis ſuas determinationes accipere. Parabolam vero, procul eſt, ut per quinque data puncta traducere valeamus. Enim vero, etſi in ejus æquatione generali etiam quinque adſint coefficientes; attamen, duo ex iis dependent a ſe invicem, nec poteſt unus ipſorum determinari, quin etiam alter omnino determinatus evadat.

643. Patet autem, parabolam traduci poſſe per quatuor puncta data. Nam, quum in ejus æquatione generali quatuor proprie coefficientes debeant definiri; plane neceſſe eſt, ut ad eos

de-

determinandos quatuor quoque puncta data habeantur. Generaliter vero, quum quæſtio eſt de definiendo numero punctorum, quæ dari debent, ut per ea tranſire poſſit linea, quæ in aliquo ordine datam ſpeciem conſtituat; ſatis erit inquirere, quot in generali ſpeciei ejus æquatione coefficientes extant, a ſe mutuo ſejuncti, nec ullum inter ſe nexum habentes. Nam, quot erunt hujuſmodi coefficientes, per tot data puncta, & non plura, lineam ejus ſpeciei traducere licebit.

644. Ita, quia generalis circuli æquatio eſt $y^2 + x^2 + py + qx + r = 0$; erunt in ea tres coefficientes, a ſe invicem ſejuncti, nec nexum ullum habentes inter ſe. Quare circulus, ut jam cunctis notum eſt, per tria data puncta, & non plura, poterit tranſire. Similiter autem hyperbola æquilatera nonniſi per tria puncta data poterit traduci. Nam generalis ejus æquatio eſt ejuſdem plane formæ cum circuli æquatione generali; nec aliud diſcriminis inter utramque deprehenditur, quam quod, ſicuti in utraque duo incognitarum quadrata omni prorſus coefficiente denudata eſſe debent; ita eadem affecta ſint oportet iiſdem ſignis in æquatione circuli, & ſignis contrariis in æquatione, quæ nos ducit ad hyperbolam æquilateram.

645. Cæterum nolo hic reticere, problema de ducenda linea, quæ ſive pertineat ad datum ordinem, ſive datam alicujus ordinis ſpeciem conſtituat, per tot puncta data, quot exigit generalis ejus æquatio, non eſſe ſemper ſolutionis capax. Fieri etenim poteſt, ut data illa puncta non habeant inter ſe eam poſitionem, quam ipſius lineæ curſus requirit. Id vero quum

con-

contingit, non modo omnes, qui in æquatione adſunt coefficientes, determinationes ſuas ex datis punctis non accipiunt, ſed unus idemque coefficiens ſubit determinationes omnino diverſas: quod poſtremum quum fieri non poſſit, plane neceſſe eſt, ut eo in caſu problema, de quo agitur, prorſus impoſſibile judicetur.

646. Hac ratione, ſi tria puncta, per quæ ducendus eſt circulus, dentur in eadem recta
FIG. 70. AB, problema fiet impoſſibile. Sint enim A, B, G puncta illa; &, aſſumpta ipſa recta AB velut linea abſciſſarum, evaneſcet in quolibet eorum punctorum ordinata y. Unde, pro iis æquatio circuli generalis erit $x^2 + qx + r = 0$: quæ, ſicuti dat $r = 0$ in puncto A; ita, poſita $AB = a$, dabit $a^2 + qa$ in puncto B; &, poſita $AG = b$, dabit $b^2 + qb$ in puncto G. Quare ex datis iis punctis, non modo coefficiens p nullam determinationem ſortitur, verum etiam coefficiens alter q ſubit duas determinationes diverſas; quum fiat æqualis, tum ipſi $-a$, cum ipſi $-b$.

647. Mirari autem non ſubibit, quod problema fiat impoſſibile, nulla radice imaginaria illud indicante. Etſi enim, ob coefficientem p, qui manet indeterminatus, indeterminatum pariter problema cenſendum ſit; attamen, ob alium coefficientem q, qui duas ſubit determinationes diverſas, idem problema plus quam determinatum debet haberi. Plane vero, ſicuti problemata pluſquam determinata ut plurimum impoſſibilia deprehenduntur, ita eorum impoſſibilitas nulla radice imaginaria poteſt indicari; quandoquidem in reſolutione talium problematum conditiones ſuperfluæ cum neceſſariis ſub una eademque æquatione nequeunt comprehendi.

V.

V. *Ratio diſtinguendi terminos in formulis linearum cujuſque ordinis.*

648. HActenus vocem termini in confectis linearum formulis, ad deſignandam quamlibet partem ipſarum, accepimus. Sed deinceps non adeo generalis erit ejus ſignificatio: ut quæ, quandoque partem unam, interdum complexum duarum, aut plurium partium poterit deſignare. Unde, priuſquam ulterius progrediamur, ad rem fore putamus, paucis oſtendere, qua ratione in formula linearum cujuſque ordinis diſtinguendi ſint in poſterum a ſe invicem termini.

649. Et quidem in ſequentibus formulæ linearum duplici ratione ſub contemplationem venient; vel nempe, relate ad unam tantum incognitarum, quæ in formulis ipſis continentur; vel etiam in ordine ad utramque incognitam ſimul. Unde, ſicuti, pro duplici hoc reſpectu, dupliciter formulæ ipſæ debent ordinari; ſic pariter, pro duplici eas ordinandi ratione, biſariam diſtinguendi ſunt in iis a ſe mutuo termini.

650. Primo igitur, quum formulæ ad examen veniunt, relate ad unam tantum incognitarum; ordinandæ quidem ſunt illæ, ſecundum dimenſiones illius dumtaxat incognitæ, nulla habita alterius incognitæ ratione. Unde etiam diſtinguere oportebit in iis terminos a ſe invicem, perinde ac diſtinguuntur in æquationibus determinatis, quæ unam tantummódo incognitam comprehendunt.

651. Ponamus, exempli gratia, eſſe y in-

cognitam, relate ad quam ſub contemplationem veniunt formulæ linearum. Et iſto in caſu formulæ ipſæ ſubinde quidem ordinandæ erunt, ut fiat $by + (ix + k) = 0$ formula linearum primi ordinis, $ey^2 + (fx + h)y + (gx^2 + ix + k) = 0$ formula linearum ordinis ſecundi, $ay^3 + (bx + e)y^2 + (cx^2 + fx + h)y + (dx^3 + gx^2 + ix + k) = 0$ formula linearum ordinis tertii, atque ita deinceps.

652. Ordinatis autem formulis in hunc modum, liquet, primam conſtare ex duobus terminis, ſecundam ex tribus, tertiam ex quatuor,
*Art. 333. lib. 2. atque ita de aliis: adeo, ut, ad inſtar * æquationum determinatarum, unaquæque ex iis tot terminos continebit, quot deſignat exponens ordinis, ad quem refertur, auctus unitate. In ſingulis vero dicemus terminum primum, qui incognitæ y maximam poteſtatem includit; dicemus terminum ſecundum, qui ejuſdem incognitæ poteſtatem continet, uno gradu inferiorem; atque ita deinceps.

653. Jam in qualibet formula ſinguli termini ſuos habent coefficientes. Sed, quemadmodum quilibet coefficiens tot ex partibus conſtat, quot indicat locus termini, quem afficit; hoc eſt una in primo termino, duabus in ſecundo, tribus in tertio, atque ita de aliis; ſic altera incognita x iis in partibus, ex ea, cujus exponens eſt 0, gradatim ad poteſtates alias ſuperiores pro ipſo partium numero, attollitur: adeo, ut in ſecundo termino uſque ad primam, in tertio uſque ad ſecundam, in quarto uſque ad tertiam elevata reperiatur.

654. Obtinent autem hæc omnia, ſi non

y, ſed

y, ſed x ſit incognita, relate ad quam formulæ linearum ſub contemplationem veniunt. Nam in hoc alio caſu formulas ipſas ſubinde quidem ordinare oportebit, ut fiat $ix + (by + k) = o$ formula linearum primi ordinis, $gx^2 + (fy + i)x + (ey^2 + by + k) = o$ formula linearum ordinis ſecundi, $dx^3 + (cy + g)x^2 + (by^2 + fy + i)x + (ay^3 + ey^2 + by + k) = o$ formula linearum ordinis tertii, atque ita de aliis: qua ratione eadem adhuc in iis locum habere, nemo non videt.

655. Secundo, quum formulæ ad examen veniunt, relate ad utramque incognitam ſimul; ordinare eas oportebit, ſecundum dimenſiones utriuſque incognitæ: adeo, ut omnes illæ partes, in quibus id, quod incognitum eſt, eundem dimenſionum numerum habet, pro uno eodemque termino debeant haberi. Qua ratione erit $(by + ix) + k = o$ formula linearum primi ordinis, $(ey^2 + fxy + gx^2) + (by + ix) + k = o$ formula linearum ordinis ſecundi, $(ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (by + ix) + k = o$ formula linearum ordinis tertii, atque ita deinceps.

656. Sed, etiam in hunc modum formulis ordinatis, perſpicuum eſt, unamquamque ex iis tot terminos continere, quot deſignat exponens ordinis, ad quem refertur, auctus unitate; hoc eſt duos formulam linearum primi ordinis, tres formulam linearum ordinis ſecundi, quatuor formulam linearum ordinis tertii, atque ita de aliis. In ſingulis autem dicemus pariter terminum primum, in quo incognitum maximum dimenſionum numerum habet; dicemus terminum ſecundum, in quo idem incognitum dimenſio-

nes habet, una pauciores; atque ita deinceps.

657. In iſta autem formulas linearum ordinandi ratione illud quidem peculiare occurrit, quod, non tam coefficientes terminorum, quam ipſi quidem termini ex variis partibus conſtant, quarum quælibet ſuum habet coefficientem peculiarem, ac proprium. Harum partium numerus in primo termino eſt ipſe ordinis exponens, auctus unitate. In aliis autem terminis gradatim unitate minuitur, uſque adeo, ut ultimus terminus, in quo incognitum nullas habet dimenſiones, nonniſi unicam partem includat.

CAPUT II.

Linearum cujuſque ordinis formularum transformationes.

658. Expoſita ratione, tum conficiendi formulas linearum cujuſcumque ordinis, cum diſtinguendi a ſe invicem terminos, qui in iis continentur; de transformationibus earundem formularum agendum nunc nobis erit. Transformari autem dicuntur confectæ formulæ, quotieſcumque mutatur in iis, vel ſola linea abſciſſarum, vel ſola linea ordinatarum, vel utraque harum linearum. Nec dubium eſſe poteſt, quin hujuſmodi earum formularum transformationes maximo nobis futuræ ſint uſui, pro rimandis affectionibus linearum, quæ ſub formulis iis continentur.

659. Accidit enim perſæpe, ut rectis illis, quæ vices gerunt in formulis lineæ abſciſſarum,

& li-

& lineæ ordinatarum, non ita facile ſit, linearum, de quibus agitur, affectiones quaſdam detegere. Unde opportunum erit, loco earum rectarum alias pro lubitu ſubſtituere; quia fieri facile poteſt, ut iſtis mediantibus nullo negotio obtineatur id, quod illarum ope difficulter conſequi liceret. Viſum eſt autem, de hujuſmodi formularum transformationibus peculiari capite diſſerere, ut omnes caſus, qui occurrere poſſunt, accurate proſequi valeamus.

I. *Transformationes formularum, pro mutanda in iis ſola linea abſciſſarum.*

660. Diximus *, transformationibus formularum mutari in iis, vel ſolam lineam abſciſſarum, vel ſolam lineam ordinatarum, vel utramque harum linearum. Oſtendemus itaque primum, quomodo transformandæ ſint formulæ, pro mutanda in ipſis dumtaxat linea abſciſſarum. Qua in re tres caſus occurrere poſſunt. Primus eſt, quum nova linea abſciſſarum debet eſſe priori parallela. Secundus, quum ei occurrere debet in ipſa ejus origine. Et tertius denique, quum ſubinde ad eam inclinata ſit oportet, ut tamen occurſus fiat in alio puncto. * *art. 658.*

661. Sit igitur formulæ, de qua agitur, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiatur in AC punctum quodvis F, ex quo ducatur recta FG, ipſi AB parallela. Et efficiendum ſit primo, ut recta iſta FG evadat in formula linea abſciſſarum. Sumatur in AB abſciſſa quævis AN, ſitque MN ejus ordinata corre- FIG. 72.

ſpondens, quæ conveniat cum FG in O. Erit ergo AN $= x$, & MN $= y$. Quumque æquales ſint duæ AN, FO; liquet, in formula transformata abſciſſam novam FO eadem incognita x debere deſignari.

662. Quia vero ordinata, huic correſpondens, MO ipſi MN nequaquam eſt æqualis; utique, ad eam deſignandam, alia quidem incognita opus erit. Itaque ponatur MO $= z$. Et quoniam differentia ipſarum MN, MO eſt ubique æqualis ipſi AF; proinde poſita AF$=p$, fiet omni in loco $z+p=y$. Unde evadet in formula recta FG linea abſciſſarum, ſi, manente eadem incognita x, ſcribatur in ea $z+p$ loco alterius incognitæ y: quod qua ratione, abſque multo labore, paulo compendioſius fieri poſſit, jam quidem alibi * fuit explicatum.

* art. 572. lib. 2.

663. Generaliter ergo in qualibet formula mutabitur linea abſciſſarum in aliam, quæ ei ſit parallela, ſcribendo in ea loco incognitæ y incognitam aliam z, auctam conſtante quantitate p. Plane vero, ſi quantitas iſta conſtans p indeterminate capiatur, & adeo etiam, ut tum poſitiva, cum negativa eſſe poſſit; poſitio ejus parallelæ adeo pariter indeterminata prodibit, ut quamlibet rectam, priori abſciſſarum lineæ parallelam, poterit exhibere. Quare, quum ſubinde formula transformatur, poterit in nova æquatione, quævis recta, priori parallela, lineæ abſciſſarum vices ſubire.

664. Sint nunc pro formula, de qua agitur, FG linea abſciſſarum, & FC linea ordinatarum. Ducatur ex puncto F recta alia FH, quæ cum ipſa FG angulum quemvis conſtituat. Et effi-

cien-

ciendum ſit ſecundo, ut recta iſta FH evadat in formula linea abſciſſarum. Capiatur quoque in FG abſciſſa quævis FO, ſitque MO ordinata ejus correſpondens, quæ conveniat cum FH in R. Erit ergo FO $= x$, & MO $= y$. Quumque hic inæquales ſint inter ſe, tam duæ FO, FR, quam duæ MO, MR; liquet, utramque ipſarum FR, MR nova incognita debere deſignari.

665. Fiat ergo FR $= u$, & MR $= z$. Jamque, ſi, ſumpta ſuper FH portione quavis FD $= t$, ductaque DE, ipſi FC parallela, quæ conveniat cum FG in E, ponatur FE $= m$, & DE $= n$; erit primo, ut FD ad FE, ita FR ad FO; hoc eſt, ut t ad m, ita u ad x: unde eruitur $x = mu:t$; eritque ſecundo, ut FD ad DE, ita FR ad RO; hoc eſt, ut t ad n, ita u ad RO: unde infertur RO $= nu:t$. Eſt autem RO differentia ipſarum MO, MR. Quare erit $y = z + nu:t$: & propterea fiet in formula FH linea abſciſſarum, ſi utique ſcribatur in ea $mu:t$ loco x, & $z + nu:t$ loco y.

666. Jam, quum valor ipſius FD $= t$ ſumi poſſit ad libitum, licebit pro ea unitatem aſſumere: ita nempe, ut ſit $t = 1$. Hac vero ratione, quum fiat $x = mu$, & $y = z + nu$; ſatis erit, ſcribere mu loco x, & $z + nu$ loco y. Unde generaliter mutabitur in qualibet formula linea abſciſſarum in aliam, quæ ei occurrat in ipſa ejus origine, ſi, ſumptis, tum aliis incognitis u, & z, cum quantitatibus conſtantibus m, & n, ſcribatur in ipſa formula mu quidem loco x, & $z + nu$ loco y.

667. Plane vero, ſi conſtantes quantitates m, & n indeterminate capiantur, & adeo etiam,

ut ipſarum poſterior u poſſit eſſe, tum poſitiva, cum negativa; poſitio alterius ejus rectæ adeo pariter indeterminata prodibit, ut quamlibet rectam, priori abſciſſarum lineæ in ipſa ejus origine occurrentem, poterit exhibere. Quare, quum ſubinde formula transformatur, poterit in nova æquatione quælibet recta, quæ priori occurrat in ipſa ejus origine, lineæ abſciſſarum munere fungi.

668. Denique pro formula, de qua eſt quæſtio, ſint, ut prius, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiatur in AC punctum quodvis F, ex quo ducatur, tum recta FG, ipſi AB parallela, cum recta FH, utcumque ad eandem inclinata. Et efficiendum ſit poſtremo, ut recta iſta FH evadat in formula linea abſciſſarum. Capiatur rurſus in AB abſciſſa quævis AN, ſitque MN ejus ordinata correſpondens, quæ conveniat cum FG quidem in O, cum FH vero in R.

669. Erit ergo AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$. Quumque hic pariter inæquales ſint inter ſe, tam duæ AN, FR, quam duæ MN, MR; liquet, utramque ipſarum FR, NR etiam in hoc caſu nova incognita debere deſignari. Itaque fiat FR $= u$, & NR $= z$. Jamque, ſi, ſumpta ſuper FH portione quavis FD $= 1$, ductaque DE, ipſi AC parallela, quæ conveniat cum FG in E, ponatur FE $= m$, & DE $= n$; invenietur, rurſus ut antea *, $x = mu$, & RO $= nu$:
proindeque, poſita AF, ſive NO $= p$, erit NR $= nu + p$.

* art. 665. 666.

670. Quum autem NR ſit differentia ipſarum MN, MR; erit $y = z + nu + p$. Quare fiet in for-

formula FH linea abſciſſarum, ſi in ea ſcribatur mu loco x, & $z+nu+p$ loco y. Unde generaliter mutabitur in qualibet formula linea abſciſſarum in aliam, quæ ei occurrat in alio puncto, quam in ipſa ejus origine, ſi, ſumptis, tum aliis incognitis u, & z, cum quantitatibus conſtantibus m,n,p, ſcribatur in ipſa formula mu loco x, & $z+nu+p$ loco y.

671. Jam, ſi conſtantes quantitates m,n,p indeterminate capiantur, & adeo etiam, ut ipſarum poſtremæ n, & p poſſint eſſe, tum poſitivæ, tum negativæ; poſitio alterius ejus rectæ adeo pariter indeterminata prodibit, ut quamlibet rectam, priori abſciſſarum lineæ in alio puncto, quam in ipſa ejus origine, occurrentem, poterit exhibere. Quare, quum ſubinde formula transformatur, poterit in nova æquatione vices ſubire lineæ abſciſſarum quælibet recta; quæ priori occurrat in alio quidem puncto, quam in ipſa ejus origine.

672. Perſpicuum eſt autem, tertium hunc caſum priores duos comprehendere. Si enim ponatur primo $n=0$: ita, ut evaneſcat DE; coibunt ſimul puncta duo D, & E, eritque $m=1$. Unde, quum fiat $x=u$, & $y=z+p$; liquet, transformationem ſubinde fieri debere, qualem prior exigit* caſus. Et ſecundo, ſi ponatur $p=0$; ita, ut evaneſcente AF, coincidat FG cum AB manebit quidam $x=mu$, ſed fiet $y=z+nu$ proindeque transformatio ſubinde erit peragenda, qualem ſecundus caſus * expoſcit. *art. 663. *art. 666.

II. *Obſervationes circa præcedentes formularum transformationes.*

673. TRaditis transformationibus formularum, pro mutanda in iis dumtaxat linea abſciſſarum; ſequitur modo, ut obſervationes quaſdam ſingulares, uſui deinceps nobis futuras, circa eas inſtituamus. Et primo quidem, quum linea abſciſſarum mutanda eſt in
*art.663. aliam, quæ ei ſit parallela; jam vidimus *, manere quidem in formula incognitam x, tantumque loco alterius y ſcribere oportere $z + p$. Id vero quum ita ſit, liquet, in formula, ſubinde transformata, maximas incognitarum poteſtates iiſdem omnino coefficientibus affectas oriri.

674. Hinc, per hujuſmodi transformationem, nulla ex maximis incognitarum poteſtatibus deleri poteſt ex formula. Neque enim indeterminata quantitas p, quam ad id opus oporteret adhibere, alicujus ex iis coefficientem ingreditur. Sed nec etiam, ordinata formula relate ad novam incognitam z, deleri poteſt terminus ſecundus. Nam, etſi in coefficiente hujus termini reperiatur quantitas p; hæc tamen minime efficere poteſt, ut coefficiens ille evaneſcat, & zero æqualis evadat. Extat namque in eodem coef-
*art.653. ficiente * portio variabilis; quum tamen indeterminata quantitas p, non quidem variabilis, ſed
*art.663. conſtans eſſe * debeat.

675. Ut autem hæc omnia exemplo aliquo clariora evadant, capiatur formula linearum ſecundi ordinis; jamque ea, relate ad y ordinata,
*ar.651. eſt * $ey^2 + (fx + b)y + (gx^2 + ix + k) = 0$.

Pla-

Plane vero, ſcribendo $z+p$ loco y, hoc eſt, minuendo valores incognitæ y data quantitate p; eadem evadit $ez^2+(fx+b+2ep)z+(gx^2+ix+fpx+k+ep^2+bp)=0$: in qua, quum maximæ incognitarum poteſtates eoſdem, quos prius, coefficientes habeant, abunde liquet, per indeterminatam p, nullam ex iis poſſe deleri.

676. Sed neque etiam deleri poteſt terminus ſecundus. Ad eum enim delendum, aſſumere oporteret $fx+b+2ep=0$. Inde autem eruitur $p=(-fx-b):2e$: quod eſt contra hypotheſim; quum valor ipſius p conſtans eſſe * debeat. Interim, ſi fuerit $f=0$, deleri is optime poterit. Sic enim faciendum eſſet $b+2pe=0$: ex qua quum eruatur $p=-b:2e$; liquet, valorem ipſius p conſtantem oriri. *Art. 663.

677. Secundo, quum linea abſciſſarum mutanda eſt in aliam, quæ ei occurrat in ipſa ejus origine; jam vidimus *, ſcribendum eſſe mu loco x, & $z+nu$ loco y. Hinc autem duo conſequuntur. Primo, quod in formula, ſubinde transformata, oritur quidem affecta eodem coefficiente maxima poteſtas ordinatæ, ſed non item maxima poteſtas abſciſſæ. Et ſecundo, quod, quum in novo coefficiente maximæ poteſtatis abſciſſæ utraque indeterminatarum m, & n reperiatur, ipſius abſciſſæ maxima poteſtas poteſt, per hujuſmodi transformationem, ex ipſa æquatione quandoque deleri. *Art. 666.

678. Ut vero horum utrumque, exemplo adhibito, clarius evadat, capiatur rurſus formula linearum ſecundi ordinis, relate ad y ordinata, $ey^2+(fx+b)y+(gx^2+ix+k)=0$. Et, quemadmodum, ponendo mu loco x, habe-

be-

betur loco ejus hæc alia $ey^2 + (fmu + b)y + (gm^2u^2 + imu + k) = 0$; ita, ſcribendo inſuper $z + nu$ loco y, hoc eſt, minuendo valores incognitæ y quantitate nu, eadem evadet $ez^2 + (fmu + 2enu + b)z + (gm^2u^2 + fmnu^2 + en^2u^2 + imu + bnu + k) = 0$.

679. Jam in nova iſta æquatione maxima poteſtas ordinatæ eundem, quem prius, coefficientem habet; ſed non item maxima poteſtas abſciſſæ: quippe cujus coefficiens, non quidem eſt g, ſed $gm^2 + fmn + en^2$. Quum autem in iſto coefficiente adſit utraque indeterminatarum m, & n; nihil vetat, ſupponere $gm^2 + fmn + en^2 = 0$, ſive etiam $m^2 : n^2 + fm : gn + e : g = 0$. Unde, ſi hujus æquationis, ubi fractio $m : n$ gerit vices incognitæ, duæ radices fuerint reales; jam licebit, ope cujuſque earum radicum, delere maximam poteſtatem abſciſſæ.

680. Nec ad rem facit, quod utraque earum radicum tantum ratio nobis innoteſcit, quæ inter ipſas m, & n intercedit. Id namque ſatis eſt, ut determinetur poſitio ejus rectæ, in quam mutanda eſt linea abſciſſarum, quo illud poſſit obtineri. Neque enim, ad determinandam poſitionem, quam habet FH relate ad FG, neceſſe eſt, longitudines ipſarum FE, DE perſpectas habere; ſed ſatis quidem erit, ſi, quam rationem habeat FE ad DE, ſit nobis cognitum, ac exploratum. Quum ergo habeatur FE $= m$, & DE $= n$; ex cognita ratione, quam habet m ad n, cognoſcetur etiam ratio, quam habet FE ad DE. Unde poſitio ipſius FH relate ad aliam FG nota pariter evadet.

FIG. 72.

681. Etſi autem, transformatione iſta, liceat,

ceat; quandoque delere maximam abſciſſæ poteſtatem; ordinata tamen æquatione relate ad incognitam z, terminum ſecundum ex ea numquam delere licebit. Ut enim ex æquatione $ez^2 + (fmu + 2enu + b)z + (gm^2u^2 + fmnu^2 + en^2u^2 + imu + bnu + k) = 0$ deleri poſſit ſecundus terminus, aſſumere oportebit $fmu + 2enu + b = 0$. Inde autem minime erui poteſt ratio, quam habet m ad n; quum ei impedimento ſit terminus b. Plane vero, ſi fuerit $b = 0$; tunc deleri is optime poterit. Sic enim faciendum eſſet $fmu + 2enu = 0$, hoc eſt $fm + 2en = 0$: unde eruitur $m : n = - 2e : f$.

682. Denique, ubi quæſtio eſt de mutanda linea abſciſſarum in aliam, quæ ei occurrat in alio puncto, quam in ipſa ejus origine; jam vidimus *, ſcribendum eſſe mu loco x, & $z + nu + p$ loco y. Inde autem rurſus duo illa conſequuntur, quæ in ſecundo obtinent * caſu. Sed, præter ea, hoc amplius occurrit notatu dignum, quod, ordinata æquatione relate ad incognitam z, licebit ſemper, transformatione iſta, delere ex ea terminum ſecundum; quum in ejus coefficiente, præter duas indeterminatas m, & n, tertia etiam p reperiatur.

*art.670.

*art.677.

683. Id vero, ut exemplo aliquo liquido conſtet, capiatur iterum formula linearum ſecundi ordinis, relate ad y ordinata, $ey^2 + (fx + b)y + (gx^2 + ix + k) = 0$. Et, ſicuti, ponendo mu loco x, habetur loco ejus hæc alia $ey^2 + (fmu + b)y + (gm^2u^2 + imu + k) = 0$; ita, ſcribendo inſuper $z + nu + p$ loco y, eadem evadet $ez^2 + (fmu + 2enu + b + 2ep)z + (gm^2u^2 + fmnu^2 + en^2u^2 + imu + 2enpu + bnu$

$+ fmpu$

$+ fmpu + k + ep^2 + bp) = 0)$: in qua delebitur ſecundus terminus, ſi utique fieri poſſit, ut ſit $fmu + 2enu + b + 2ep = 0$.

684. Quominus autem id fiat, nihil prohibet. Si enim ponamus $fmu + 2enu = 0$, hoc eſt $fm + 2en = 0$, & $b + 2ep = 0$; jam erit $fmu + 2enu + b + 2ep = 0$. Plane vero ex priore earum æquationum $fm + 2en = 0$ eruitur $m:n = -2e:f$: adeo nempe, ut, aſſumpta $m = 2e$, fiet $n = -f$; ex altera autem $b + 2ep = 0$ infertur $p = -b:2e$. Unde, ſi ipſa æquatio ſubinde transformetur, ut ſcribatur $2ex$ loco x, & $z - fx - b : 2e$ loco y; jam loco ejus alia orietur, quæ, ordinata relate ad z, ſecundo termino deficiens deprehendetur.

685. Atque ita aliud agentes, jam earum transformationum, quæ fiunt, pro mutanda in formulis ſola linea abſciſſarum, proprios novimus characteres. Priore etenim transformandi ratione, nec ullam ex maximis incognitarum poteſtatibus, nec ſecundum terminum transformatæ æquationis, quæ relate ad incognitam z ſit ordinata, delere fas erit. Secunda vero deleri quidem quandoque poterit maxima poteſtas abſciſſæ, ſed ſecundum terminum numquam delere licebit. Et denique tertia transformandi ratione, non modo maxima poteſtas abſciſſæ quandoque deleri, ſed ipſe ſecundus terminus ſemper poterit eliminari.

686. Verum hic ſedulo notari debet, quod, ubi dicimus, primis duabus transformandi rationibus non poſſe ex æquatione, ordinata relate ad incognitam z, deleri terminum ſecundum; id intelligi debet, ubi ejus coefficiens eſt partim

con-

conſtans, partim variabilis. Nam primo, ſi nihil contineat variabilis; non aliter deleri poteſt, quam priore transformandi ratione, hoc eſt, ſcribendo $z + p$ loco y. Et ſecundo, ſi nihil contineat conſtantis; ad eum delendum, ſecunda transformandi ratione opus erit, & omnino ſcribere oportebit mu loco x, & $z + nu$ loco y. Quorum utrumque ex ipſis exemplis, ſuperius * allatis, liquet abunde. *art. 676. 681.

III. *Transformationes formularum, pro mutanda in iis ſola linea ordinatarum.*

687. PRoximum jam eſt, ut oſtendamus, quo pacto transformari debeant formulæ, quum quæſtio eſt, de mutanda in iis ſola linea ordinatarum. Qua in re tres itidem caſus occurrere poſſunt. Primus eſt, quum nova linea ordinatarum debet eſſe priori parallela. Secundus, quum ei occurrere debet in ipſa ejus origine. Et tertius denique, quum ſubinde ad eam inclinata ſit oportet, ut tamen occurſus in alio puncto contingat.

688. Sit igitur formulæ, de qua agitur, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiatur in AB punctum quodvis f, ex quo ducatur recta fg, ipſi AC parallela. Et efficiendum ſit primo, ut recta iſta fg evadat in formula linea ordinatarum. Sumatur in AB abſciſſa quævis AN, ſitque MN ejus ordinata correſpondens. Erit ergo AN $= x$, & MN $= y$. Quumque, transformatione iſta adhuc MN ſit ordinata, pertinens ad punctum M; liquet, in formula transformata eadem incognita y debere ordinatam exhiberi. FIG. 73.

689.

689. Quia vero, ea transformatione, fit f principium abſciſſarum; utique in formula transformata erit fN abſciſſa, correſpondens ordinatæ MN: & idcirco ad eam deſignandam alia quidem incognita opus erit. Itaque ponatur $fN = u$. Et quoniam differentia ipſarum AN, fN eſt ubique æqualis ipſi Af: proinde poſita $Af = q$, fiet omni in loco $u + q = x$. Unde evadet in formula recta fg linea ordinatarum, ſi, manente eadem incognita y, ſcribatur $u + q$ loco x.

690. Generaliter ergo in qualibet formula mutabitur linea ordinatarum in aliam, quæ ei ſit parallela, ſcribendo in ea loco incognitæ x incognitam aliam u, auctam conſtante quantitate q. Plane vero, ſi conſtans iſta quantitas q indeterminate capiatur, & adeo etiam, ut, tum poſitiva, cum negativa eſſe poſſit; poſitio ejus parallelæ adeo pariter indeterminata prodibit, ut quamlibet rectam, priori ordinatarum lineæ parallelam, poterit exhibere. Quare, quum ſubinde formula transformatur, poterit in nova æquatione quævis recta, priori parallela, lineæ ordinatarum vices obire.

691. Sint nunc pro formula, de qua agitur, fB linea abſciſſarum, & fg linea ordinatarum. Ducatur ex puncto f recta alia fb, quæ cum ipſa fg angulum quemvis conſtituat. Et efficiendum ſit ſecundo, ut recta iſta fb evadat in formula linea ordinatarum. Capiatur in linea, ad quam pertinet formula, punctum quodvis M, ex quo demittantur ſuper fB rectæ MN, MO, ipſis fg, fb parallelæ. Erit ergo $fN = x$, & $MN = y$. Quumque hic inæquales ſint inter ſe, tam duæ fN, fO, quam duæ MN, MO; liquet, utramque

que ipſarum fO, MO nova incognita debere deſignari.

692. Fiat ergo $fO = u$, & $MO = z$. Jamque, ſi, ſumpta ſuper fb portione quavis $fd = t$, ductaque de, ipſi fB parallela, quæ conveniat cum fg in e, ponatur $fe = r$, & $de = s$; erit primo, ut fd ad fe, ita MO ad MN, hoc eſt, ut t ad r, ita z ad y: unde eruitur $y = rz : t$; eritque ſecundo, ut fd ad de, ita MO ad ON, hoc eſt, ut t ad s, ita z ad ON: unde infertur $ON = sz : t$. Eſt autem ON differentia ipſarum fN, fO. Quare erit $x = u + sz : t$: & propterea fiet in formula fb linea ordinatarum, ſi ponatur in ea $rz : t$ loco y, & $u + sz : t$ loco x.

693. Jam, quum valor ipſius $fd = t$ ſumi poſſit ad libitum, licebit, pro eo unitatem aſſumere: ita nempe, ut ſit $t = 1$. Hac vero ratione, quum fiat $y = rz$, & $x = u + sz$, ſatis erit, ſcribere rz loco y, & $u + sz$ loco x. Unde generaliter mutabitur in qualibet formula linea ordinatarum in aliam, quæ ei occurrat in ipſa ejus origine, ſi, ſumptis, tum aliis incognitis z, & u, cum quantitatibus conſtantibus r, & s, ſcribatur in ipſa formula rz loco y, & $u + sz$ loco x.

694. Plane vero, ſi conſtantes quantitates r, & s indeterminate capiantur, & adeo etiam, ut ipſarum poſterior s poſſit eſſe, tum poſitiva, cum negativa; poſitio alterius ejus rectæ adeo pariter indeterminata prodibit, ut quamlibet rectam, priori ordinatarum lineæ in ipſa ejus origine occurrentem, poterit exhibere. Quare, quum ſubinde formula transformatur, poterit in nova æquatione lineæ ordinatarum munere

 fun-

fungi quælibet recta, quæ priori occurrat in ipſa ejus origine.

695. Denique pro formula, de qua eſt quæſtio, ſint, ut prius, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Capiatur in AB punctum quodvis f, ex quo ducatur, tum recta fg, ipſi AC parallela, cum recta fb, utcumque ad eamdem inclinata. Et efficiendum ſit poſtremo, ut recta iſta fb evadat in formula linea ordinatarum. Capiatur rurſus in linea, ad quam pertinet formula, punctum quodvis M, ex quo demittantur ſuper AB rectæ MN, MO, ipſis AC, fb parallelæ.

696. Erit ergo AN $= x$, & MN $= y$. Quumque hic pariter inæquales ſint inter ſe, tam duæ AN, fO, quam duæ MN, MO; liquet, utramque ipſarum MO, fO etiam in hoc caſu nova incognita debere deſignari. Itaque fiat fO$=u$, & MO $=z$. Jamque, ſi, ſumpta ſuper fb portione quavis $fd = 1$, ductaque de, ipſi AB parallela, quæ conveniat cum fg in e, ponatur $fe = r$, & de
*art.692. $= s$; invenietur rurſus, ut antea *, $y = rz$, &
693. ON $= sz$: proindeque, poſita A$f = q$, erit Af + ON $= sz + q$.

697. Quum autem Af + ON ſit differentia ipſarum AN, fO; erit $x = u + sz + q$. Quare fiet in formula fb linea ordinatarum, ſi in ea ſcribatur rz loco y, & $u + sz + q$ loco x. Unde generaliter mutabitur in qualibet formula linea ordinatarum in aliam, quæ ei occurrat in alio puncto, quam in ipſa ejus origine, ſi, ſumptis, tum aliis incognitis u, & z, cum quantitatibus conſtantibus r, s, q, ſcribatur in ipſa formula rz loco y, & $u + sz + q$ loco x.

698. Jam, ſi conſtantes quantitates r, s, q indeterminate capiantur, & adeo etiam, ut ipſarum poſtremæ s, & q poſſint eſſe, tum poſitivæ cum negativæ; politio alterius ejus rectæ adeo pariter indeterminata prodibit, ut quamlibet rectam, priori ordinatarum lineæ in alio puncto, quam in ipſa ejus origine, occurrentem, poterit exhibere. Quare, quum ſubinde formula transformatur, poterit in nova æquatione vices ſubire lineæ ordinatarum quælibet recta, quæ priori occurrat in alio puncto, quam in ipſa ejus origine.

699. Perſpicuum eſt autem, tertium hunc caſum priores duos comprehendere. Si enim ponatur primo $s = 0$: ita, ut evaneſcat de; coibunt in unum puncta duo d, & e, eritque $m = 1$. Unde, quum fiat $y = z$, & $x = u + q$; liquet, transformationem ſubinde fieri debere, qualem prior exigit * caſus. Et ſecundo, ſi ponatur $q = 0$: *art. 690.
ita, ut evaneſcente Af, coincidat fg cum AC; manebit quidem $y = rz$, ſed fiet $x = u + sz$: proindeque transformatio ſubinde erit peragenda, qualem ſecundus caſus * expoſcit. *art. 693.

IV. *Obſervationes circa formularum transformationes, mox inſtitutas.*

700. Oſtenſis transformationibus formularum, pro mutanda in iis dumtaxat linea ordinatarum; inſtituemus modo circa eas obſervationes quaſdam ſingulares, quæ uſui deinceps futuræ nobis erunt. Et primo quidem, quum linea ordinatarum mutanda eſt in aliam, quæ ei ſit parallela; jam vidimus *, ma- *art. 690.

nere quidem in formula incognitam y, tantum-
que loco alterius x ſcribere oportere $u + q$. I-
vero quum ita ſit, liquet, in formula, ſubi-
transformata, maximas incognitarum poteſtat-
iiſdem omnino coefficientibus affectas oriri.

701. Hinc, per hujuſmodi transformatio-
nem, nulla ex maximis incognitarum poteſta-
tibus deleri poteſt ex formula. Neque enim in-
determinata quantitas q, quam ad id opus o-
porteret adhibere, alicujus ex iis coefficientes
ingreditur. Sed nec etiam, ordinata formula
relate ad incognitam u, deleri poteſt terminus ſe-
cundus. Nam, etſi in coefficiente hujus termi-
ni reperiatur quantitas q; hæc tamen minime
efficere poteſt, ut coefficiens ille evaneſcat, ſi
zero æqualis evadat. Extat namque in eodem
coefficiente portio variabilis; quum tamen inde-
terminata quantitas q, non quidem variabilis,
*art. 617. ſed conſtans eſſe * debeat.

702. Ut autem hæc omnia exemplo aliquo
clariora evadant, capiatur formula linearum ſe-
cundi ordinis; jamque ea, relate ad x ordinata,
*art 654. eſt * $gx^2 + (fy + i)x + (ey^2 + by + k) = 0$.
Plane vero, ſcribendo $u + q$ loco x, hoc eſt, mi-
nuendo valores incognitæ x data quantitate q,
eadem evadit $gu^2 + (fy + i + 2gq)u + (ey^2 +$
$by + fqy + k + gq^2 + iq) = 0$: in qua quum
maximæ incognitarum poteſtates eoſdem, quos
prius, coefficientes habeant; abunde liquet, ope
ipſius indeterminatæ q, nullam ex iis poſſe deleri.

703. Sed neque etiam, ordinata æquatio-
ne relate ad incognitam u, deleri poteſt termi-
nus ſecundus. Ad eum enim delendum, aſſume-
re oporteret $fy + i + 2gq = 0$. Inde autem
erui-

eruitur $q = (-fy - i) : 2g$, quod eſt contra hypotheſim; quum valor ipſius q conſtans eſſe * debeat. Interim, ſi fuerit $f = 0$, deleri is optime poterit. Sic enim faciendum eſſet $i + 2gq = 0$: ex qua quum eruatur $q = -i : 2g$; liquet, valorem ipſius q conſtantem oriri. *ar. 690.

704. Secundo, quum linea ordinatarum mutanda eſt in aliam, quæ ei occurrat in ipſa ejus origine; jam vidimus *, ſcribendum eſſe rz loco y, & $u + sz$ loco x. Hinc autem duo conſequuntur. Primo, quod in formula, ſubinde transformata, oritur quidem affecta eodem coefficiente maxima poteſtas abſciſſæ, ſed non item maxima poteſtas ordinatæ. Et ſecundo, quod, quum in novo coefficiente maximæ poteſtatis ordinatæ utraque indeterminatarum r, & s reperiatur, ipſius ordinatæ maxima poteſtas poteſt, per hujuſmodi transformationem, ex ipſa æquatione quandoque deleri. *art. 693.

705. Ut autem horum utrumque, exemplo adhibito, clarius evadat, capiatur rurſus formula linearum ſecundi ordinis, relate ad x ordinata, $gx^2 + (fy + i)x + (ey^2 + by + k) = 0$. Et, quemadmodum, ponendo rz loco y, habetur loco ejus hæc alia $gx^2 + (frz + i)x + (er^2z^2 + brz + k) = 0$; ita, ſcribendo inſuper $u + sz$ loco x, hoc eſt, minuendo valores incognitæ x quantitate variabili sz, eadem evadet $gu^2 + (frz + 2gsz + i)u + (er^2z^2 + frsz^2 + gs^2z^2 + brz + isz + k) = 0$.

706. Jam in nova iſta æquatione maxima poteſtas abſciſſæ eundem, quem prius, coefficientem habet; ſed non item maxima poteſtas ordinatæ: quippe cujus coefficiens, non quidem

eſt e, ſed $er^2 + frs + gs^2$. Quum autem in iſta coefficiente adſit utraque indeterminatarum r, & s; nihil vetat, ſupponere $er^2 + frs + gs^2 = o$, ſive etiam $r^2 : s^2 + fr : es + g : e = o$. Vnde, ſi hujus æquationis, ubi fractio $r : s$ gerit vices incognitæ, duæ radices fuerint reales; jam licebit, ope cujuſque earum radicum, delere maximam poteſtatem ordinatæ.

707. Nec ad rem facit, quod utraque earum radicum tantum ratio nobis innoteſcit, quæ inter ipſas r, & s intercedit. Id namque ſatis eſt, ut determinetur poſitio ejus rectæ, in quam mutanda eſt linea ordinatarum, quo illud poſſit obtineri. Neque enim, ad determinandam poſitionem, quam habet fb relate ad fg, neceſſe eſt, longitudines ipſarum fe, de perſpectas habere; FIG. 73. ſed ſatis quidem erit, ſi, quam rationem habeat fe ad de, ſit nobis cognitum, ac exploratum. Quum ergo habeatur $fe = r$, & $de = s$; ex cognita ratione, quam habet r ad s, cognoſcetur etiam ratio, quam habet fe ad de. Vnde poſitio ipſius fb relate ad aliam fg nota pariter evadet.

708. Etſi autem, transformatione iſta, liceat, quandoque delere maximam ordinatæ poteſtatem; ordinata tamen æquatione relate ad abſciſſam u, terminum ſecundum numquam delere licebit. Vt enim ex æquatione $gu^2 + (frz + 2gsz + i)u + (er^2z^2 + frsz^2 + gs^2z^2 + brz + isz + k) = o$ deleri poſſit ſecundus terminus, aſſumere oporteret $frz + 2gsz + i = o$. Inde autem minime erui poteſt ratio, quam habet r ad s; quum ei impedimento ſit terminus i. Plane vero, ſi fuerit $i = o$; tunc deleri is optime poterit. Sic enim faciendum eſſet $frz + 2gsz = o$,

hoc

hoc eſt $fr+2gs=0$: unde eruitur $r:s=-2g:f$.

709. Denique, ubi quæſtio eſt de mutanda linea ordinatarum in aliam, quæ ei occurrat in alio puncto, quam in ipſa ejus origine; jam vidimus *, ſcribendum eſſe rz loco y, & $u+sz$ *art. 697. $+q$ loco x. Inde autem rurſus duo illa conſequuntur, quæ in ſecundo obtinent * caſu. Sed, *art. 704. præter ea, hoc amplius occurrit notatu dignum, quod, ordinata æquatione relate ad incognitam u, licebit ſemper, transformatione iſta, delere ex ea terminum ſecundum; quum in eius coefficiente, præter duas indeterminatas r, & s, tertia etiam q reperiatur.

710. Id vero, ut exemplo aliquo liquido conſtet, capiatur iterum formula linearum ſecundi ordinis, relate ad x ordinata, $gx^2+(fy+i)x+(ey^2+by+k)=0$. Et, ſicuti, ponendo rz loco y, habetur loco ejus hæc alia $gx^2+(frz+i)x+(er^2z^2+brz+k)=0$; ita, ſcribendo inſuper $u+sz+q$ loco x, eadem evadat $gu^2+(frz+2gsz+i+2gq)u+(er^2z^2+frsz+gs^2z^2+brz+2gsqz+isz+frqz+k+gq^2+iq)=0$: in qua delebitur ſecundus terminus, ſi utique fieri poſſit, ut ſit $frz+2gsz+i+2gq=0$.

711. Quominus autem id fiat, nihil prohibet. Si enim ponamus $frz+2gsz=0$, hoc eſt $fr+2gs=0$, & $i+2gq=0$; jam erit $frz+2gsz+i+2gq=0$. Plane vero, ſicuti ex priore earum æquationum $fr+2gs=0$ eruitur $r:s=-2g:f$: adeo nempe, ut, poſita $r=2g$, fiet $s=-f$; ita ex altera $i+2gq=0$ infertur $q=-i:2g$. Unde, ſi ipſa æquatio ſubinde transformetur, ut ſcribatur $2gz$ loco y, & $u-fz-i:2g$ loco x;

jam alia orietur, quæ, ordinata relate ad x, ſecundo termino deficiens deprehendetur.

712. Atq; ita aliud agentes, jam earum tranſformationum, quæ fiunt, pro mutanda in formulis ſola linea ordinatarum, proprios novimus characteres. Priore etenim transformandi ratione, nec ullam ex maximis incognitarum poteſtatibus, nec ſecundum terminum transformatæ æquationis, ordinatæ relate ad incognitam u, delere fas erit. Secunda verò deleri quidem quandoque poterit maxima poteſtas ordinatæ, ſed ſecundum terminum numquam delere licebit. Et denique, tertia transformandi ratione, non modo maxima poteſtas ordinatæ quandoque deleri, ſed ipſe ſecundus terminus ſemper poterit eliminari.

713. Verum hic ſedulo notari debet, quod ubi dicimus, primis duabus transformandi rationibus non poſſe ex æquatione, ordinata relate ad incognitam u, deleri terminum ſecundum; id intelligi debet, ubi ejus coefficiens eſt partim conſtans, partim variabilis. Nam primo, ſi nihil contineat variabilis; non aliter deleri poteſt, quam priore transformandi ratione, hoc eſt, ſcribendo $u+q$ loco x. Et, ſecundo, ſi nihil contineat conſtantis; ad eum delendum, ſecunda transformandi ratione opus erit, & omnino ſcribere oportebit rz loco y, & $u+sz$ loco x. Quorum utrumque ex ipſis exemplis, ſuperius * allatis, liquet abunde.

* Art. 703. 708.

V. Tranſ-

V. *Tranſformationes formularum, pro mutanda in iis, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum.*

714. SUpereſt, ut de' transformationibus formularum differamus, pro mutanda in iis, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum. Et quidem hic etiam tres generatim caſus occurrere poſſunt. Primus eſt, quum eæ lineæ mutandæ ſunt in alias, quæ ipſis ſint parallelæ. Secundus, quum eaſdem lineas ſubinde mutare oportet, ut una vertatur in aliam, ſibi parallelam; & altera in aliam, utcumque ad ipſam inclinatam. Ac tertius denique, quum eædem lineæ mutari debent in alias, quæ datos cum ipſis angulos conſtituant. Quemadmodum autem ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita, ut brevitati ſtudeamus, ſatis erit, tertium illum caſum ad calculum revocare.

715. Sit igitur formulæ, de qua agitur, AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum. Sumatur extra eas punctum aliquod F, ex quo ducantur, tum rectæ FG, Fg ipſis AB, AC parallelæ, cum rectæ FH, Fb utcumque ad eas inclinatæ. Et efficiendum ſit, ut in ipſa formula evadat, FH quidem linea abſciſſarum, Fb vero linea ordinatarum. Capiatur in linea, ad quam formula pertinet, punctum quodvis M, ex quo ad ipſas AB, FH demittantur rectæ MN, MP, aliis duabus AC, Fb parallelæ; earumque prior MN conveniat cum FG quidem in O, cum FH vero in R. Et, quemadmodum habetur AN$=x$, & MN$=y$; ita ponatur FP$=u$, & MP$=z$. FIG. 74.

716.

716. Extendantur deinde duæ Fg, FG donec conveniant cum ipſis AB, AC in punctis K, & L, ſitque $AK = q$, & $AL = p$. Sumantur poſtea ſuper aliis duabus FH, Fh portiones FD, Fd, quæ æquales ſint inter ſe, & unaquæque earum referat unitatem; actiſque rectis DE, de, ipſis AC, FH parallelis, quæ conveniant cum prioribus FG, Fg in punctis E & e, ponatur $FE = m$, $DE = n$, $Fe = r$, & $de = s$. Quia igitur Fd eſt ad de, ut MP ad PR; erit $PR = sz$; adeoque, addita $FP = u$, fiet $FR = u + sz$. Quumque FR ſit ad FO, ſive KN, ut FD ad FE; erit $KN = mu + msz$: & propterea, addita $AK = q$, fiet $AN = x = mu + msz + q$.

717. Vlterius, quia Fd eſt ad Fe, ut MP ad MR; erit $MR = rz$. Sed FR eſt ad RO, ut FD ad DE. Itaque, quum ſit $RO = nu + nsz$, erit $MO = rz + nsz + nu$; & conſequenter, addita AL, ſive $NO = p$, erit $MN = y = rz + nsz + nu + p$. Scribatur igitur in formula $mu + msz + q$ loco x, & $rz + nsz + nu + p$ loco y; jamque fiet, FH quidem linea abſciſſarum, Fh vero linea ordinatarum. Vnde, quid factu ſit opus, quo in qualibet formula linea abſciſſarum, & linea ordinatarum mutentur in alias, quæ datos cum ipſis angulos conſtituant; facile quidem erit intelligere.

718. Jam, ſi ponatur $s = 0$: ita, ut evaneſcente de, coeant in unum puncta duo d, & e; fiet $r = 1$. Vnde, quum habeatur $x = mu + q$, & $y = z + nu + p$; liquet, ſcribendum eſſe $mu + q$ loco x, & $z + nu + p$ loco y, quo fiat in formula FH quidem linea abſciſſarum, Fg vero linea ordinatarum. Quod ſi autem ponatur viciſſim $n = 0$

adeo,

adeo, ut, evaneſcente DE, coeant in unum puncta duo D, & E; tunc fiet $m = 1$: proindeque, quia habetur $x = u + sz + q$, & $y = rz + p$; perſpicuum eſt, ſcribendum eſſe $u + sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y, ut evadat in formula, FG quidem linea abſciſſarum, Fh vero linea ordinatarum.

719. Horum autem utrumque pertinet ad eum caſum, quum lineam abſciſſarum, & lineam ordinatarum ſubinde mutare oportet, ut una quidem vertatur in aliam, ſibi parallelam, altera vero abeat in aliam, utcumque ad ipſam inclinatam. Sed, quid facto ſit opus, quo utraque linea migret in aliam, ſibi æquidiſtantem; facile erit, exinde pariter eruere. Ponatur enim, tum $u = 0$, cum $s = 0$: adeo nempe, ut, utraque ipſarum DE, de evaneſcente, coeant in unum, tam puncta duo D, & E, quam alia duo puncta d, & e. Quumque fiat, & $r = 1$, & $m = 1$; erit $x = u + q$, & $y = z + p$: proindeque, ſcribendo $u + q$ loco x, & $z + p$ loco y; evadet in formula, recta quidem FG linea abſciſſarum, recta vero Fg linea ordinatarum.

720. Vno igitur, eodemque calculo jam ſingulos caſus enucleavimus, qui occurrere poſſunt, quum quæſtio eſt, de mutanda in formulis, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum. Sed, pro ſecundo, & tertio caſu, nolo hic reticere, quod, ſicuti punctum F ſumptum eſt extra rectas AB, AC; ita fieri poteſt, ut punctum illud, vel accedat ad punctum K, ſimul coeuntibus punctis F, & K; vel accedat ad punctum L, abeuntibus in unum punctis F, & L. Nec ſilentio eſt prætereundum, quod ſpeciatim in tertio caſu contingere quoque poteſt,

teſt, ut idem punctum F accedat ad punctum A, evaneſcente utraque ipſarum FK, FL. Verum, quid factu ſit opus, ubi horum alicui datur locus, facile erit intelligere.

721. Sane tertius caſus, ob calculum nimis moleſtum, ac laborioſum, cui eſt obnoxius, raro deinceps uſuveniet. Vbi autem caſum illum in ſubſidium advocare oportebit, dabimus operam, ut, quoad fieri poteſt, calculi labor minuatur: & ea propter eo utemur, tantum, quum
FIG. 75. punctum F accedit ad punctum A; hoc eſt, ubi linea abſciſſarum AB, & linea ordinatarum AC mutandæ ſunt in alias AH, A*b*, quæ, eis occurrentes in ipſa earum origine A, utcumque ad eaſdem inclinantur. Quia vero, coeuntibus ſimul punctis F, & A, etiam puncta duo K, & L cum A confunduntur; habebitur, tum $p = 0$, cum $q = 0$: proindeque, ut ea fiat mutatio, ſcribendum erit in formula $mu + msz$ loco x, & $rz + nsz + nu$ loco y.

722. Non eſt autem hoc loco reticendum, quod ad hujuſmodi transformandi rationem
art. 29. pertinet ſimpliciſſima illa mutatio, alibi notata, per quam linea abſciſſarum vertitur in lineam ordinatarum, & viciſſim linea ordinatarum in lineam abſciſſarum. Si enim ponatur $m = 0$, & $n = 1$; coincidet recta AH cum recta AC. Pariterque, ſi ponatur $r = -1 : 0$, & $s = 1 : 0$, coincidet recta A*b* cum recta AB. Quum autem hac ratione fiat $mu + msz = z$, & $rz + nsz + nu = u$; liquet, ſcribendum eſſe z loco x, & u loco y: qua ratione non aliud novi in formula inducetur, niſi, quod ordinatæ quidem in abſciſſas, abſciſſæ vero in ordinatas convertentur.

VI.

VI. *Præcedentium transformationum propria cujuſque accidentia.*

723. RΕcenſendi ſunt modo paulo breviter proprii characteres earum transformationum, quæ fiunt, pro mutanda in formulis, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum. Ac primo quidem, ubi lineæ illæ mutandæ ſunt, in alias ipſis æquidiſtantes; jam vidimus * ſcribendum eſſe in formula $u+q$ loco x, & $z+p$ loco y. Hinc vero liquet, in formula, ſubinde transformata, maximas incognitarum poteſtates iiſdem omnino coefficientibus affectas oriri; neque adeo, per hujuſmodi transformationem, ullam ipſarum ex æquatione poſſe deleri. Quumque quantitates indeterminatæ p, & q conſtantes eſſe debeant; liquet etiam, quod, ordinata æquatione relate ad aliquam ex incognitis, nec item ex ea deleri poteſt, transformatione iſta, terminus ſecundus: niſi forte ejus coefficiens ſit conſtans, nec aliquid contineat variabils. *art.719.

724. Secundo, quum mutatio ſubinde fieri debet, ut linea quidem ordinatarum vertatur in aliam, ſibi parallelam, linea vero abſciſſarum in aliam, utcumque ad eam inclinatam; jam novimus *, ſcribendum eſſe in formula $mu+q$ loco x, & $z+nu+p$ loco y. Hinc vero perſpicuum eſt, in formula, ſubinde transformata, maximam poteſtatem abſciſſæ alio quidem coefficiente affectam oriri, quam proinde interdum poſſe ex ipſa æquatione deleri. Quumque, ordinata æquatione relate ad incognitam z, nihil *art.718.

ob-

obſtat, quominus coefficiens ſecundi termini zero æqualis ſupponatur; perſpicuum eſt quoque, transformatione iſta, ipſum ſecundum terminum poſſe ſemper ex æquatione deleri: in tantum, ut, ſi ejus coefficiens nihil contineat conſtantis, fieri debeat $p = 0$.

725. Tertio, ubi mutatio ſubinde eſt peragenda, ut viciſſim linea quidem abſciſſarum vertatur in aliam, ſibi parallelam, linea vero ordinatarum in aliam, utcumque ad eam inclinatam;
*art. 718. jam conſtitit *, ſcribendum eſſe in formula $x + sz + q$ loco x; & $rz + p$ loco y. Hinc vero liquet, in formula, hac lege transformata, maximam poteſtatem ordinatæ alio quidem coefficiente affectam oriri, quam proinde interdum poſſe ex ipſa æquatione deleri. Et quia, ordinata æquatione relate ad incognitam x, nihil vetat, quominus coefficiens ſecundi termini zero æqualis ſupponatur; patet quoque, transformatione iſta, ipſum ſecundum terminum poſſe ſemper ex æquatione deleri: in tantum, ut, ſi ejus coefficiens nihil contineat conſtantis, fieri debeat $q = 0$.

726. Denique, ubi duæ illæ lineæ mutandæ ſunt in alias, quæ datos cum ipſis angulos
*art. 717. conſtituant; jam vidimus *, ſcribendum eſſe in formula $mu + msz + q$ loco x, & $rz + nz + nu + p$ loco y. Hinc vero liquido patet, in formula, ſubinde transformata, alio quidem coefficiente affectam oriri, tum maximam poteſtatem abſciſſæ, cum maximam poteſtatem ordinatæ; & conſequenter utramque ſimul poſſe interdum ex ipſa æquatione deleri. Quumque, ordinata æquatione relate ad quamlibet ex incogni-

tis,

tis, ſemper fieri poteſt, ut coefficiens ſecundi termini zero æqualis evadat, nec, ubi id fit relate ad incognitam unam, quicquam obſtat, quominus idem fiat interdum relate ad incognitam alteram: manifeſtum eſt quoque, transformatione iſta, ſecundum terminum poſſe quandoque deleri relate ad utramque incognitam ſimul.

727. Notavimus autem ſupra *, hunc tertium caſum tunc tantum deinceps uſui nobis fore, quum linea abſciſſarum, & linea ordinatarum mutandæ ſunt in alias, quæ, eis occurrentes in ipſa earum origine, datos quoſvis angulos cum iiſdem conſtituunt. Unde, ſicuti, ad id peragendum, neceſſe eſt, ſcribere $mu + msz$ loco x, & $rz + nsz + nu$ loco y; ita clare liquet, tranſformatione iſta, ob novos, quos ſortiuntur coefficientes maximæ incognitarum poteſtates, poſſe quidem interdum utramque earum ex æquatione deleri; ſed ſecundum terminum ex eadem æquatione adeo quidem non poſſe relate ad utramque incognitam ſimul eliminari, ut nec etiam relate ad unam tantum incognitarum eum delere fas ſit: niſi forte ejus coefficiens nihil contineat conſtantis.

* Art. 721.

728. Illud interim, ope hujus transformationis, interdum obtinere licebit, quod aliquem deinceps uſum habebit, ut coefficiens ſecundi termini, relate ad quamcumque incognitarum ordinetur æquatio, ſit ſemper quantitas conſtans. Quod ut liquido conſtet, capiatur formula linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Et, ſicuti in ea, ponendo, tum $b = 0$, cum $c = 0$, fit quantitas conſtans coefficiens ſecun-

di termini, tam quum æquatio ordinatur relate ad incognitam y, quam quum ordinatur relate ad incognitam x; ita eo res redit, ut, ſcribendo $mu + msz$ loco x, & $rz + nsz + nu$ loco y, evaneſcat, tum coefficiens ipſius uz^2, cum coefficiens ipſius u^2z.

729. Et quidem, debitis ſubſtitutionibus peractis, fiet $(3an^3 + 3bmn^2 + 3cm^2n + 3dm^3)s^2 + (6an^2 + 4bmn + 2cm^2)rs + (3an + bm)r^2$ coefficiens ipſius uz^2, & $(3an^3 + 3bmn^2 + 3cm^2n + 3dm^3)s + (3an^2 + 2bmn + cm^2)r$ coefficiens ipſius u^2z. Plane vero, ſicuti ex ſecundo iſto coefficiente, zero æquato, eruitur $rs = -(3an^3 - 3bmn^2 - 3cm^2n - 3dm^3):(3an^2 + 2bmn + cm^2)$; ita prior coefficiens, nihilo etiam æquatus, dabit $r^2 : s^2 + (6an^2 + 4bmn + 2cm^2)r : (3an + bm)s + (3an^3 + 3bmn^2 + 3cm^2n + 3dm^3) : (3an + bm) = 0$. Unde, ſcribendo in æquatione iſta loco $r : s$ valorem inventum, & loco $r^2 : s^2$ quadratum ejus; habebitur hæc alia æquatio $3abn^3 + (3ac - b^2)n^2m + (9ad - bc)nm^2 + (3bd - c^2)m^3 = 0$, ſive etiam $m^3 : n^3 + (9ad - bc)m^2 : (3bd - c^2)n^2 + (3ac - b^2)m : (3bd - c^2)n + 3ab : (3bd - c^2) = 0$.

730. Quum igitur in poſtrema iſta æquatione fractio $m : n$ gerat vices incognitæ; licebit, ope ejus, invenire rationem, quam m ad n debet habere, ut in æquatione propoſita coefficiens ſecundi termini relate ad utramque incognitam evadat quantitas conſtans. Et quoniam eadem æquatio, velut trium dimenſionum, tres poteſt radices reales admittere; liquet id, de quo agitur, tripliciter etiam præſtari poſſe: in tantum, ut, ſi duæ ex iis radicibus evadant imagi-

ginariæ, duo etiam ex iis modis impoſſibiles fiant. Determinata autem ratione, quæ adſit oportet inter m, & n; nota itidem fiet ratio, quam r ad s debet habere. Nam, quum ſit $r:s = -(3an^3 - 3bmn^2 - 3cm^2n - 3dm^3):(3an^2 + 2bmn + cm^2) = 0$; ſcribendo loco m, & n congruos ſuos valores, jam per terminos, plane notos, fractionis $r:s$ valor innoteſcet.

731. Qui autem ſint congrui iſti valores, quos loco ipſarum m, & n ſcribere oportebit, haud arduum erit intelligere. Jam enim ex cognita ratione, quam m ad n debet habere, determinare licebit poſitionem rectæ AH, in quam mutanda eſt linea abſciſſarum AB. Itaque, ſi, ea determinata, capiatur ſuper AH portio AD$=1$, & ducatur per punctum D recta DE, ipſi AC parallela, quæ conveniat cum AB in E; fiet AE valor ipſius m, & DE valor alterius n. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam, ubi quantitates m, & n in transformanda æquatione ſeorſim adhibuimus, non alias rectas nobis exhibebant, quam ipſas AE, DE. Unde, quum rurſus ſejunctæ ſub contemplationem veniunt, neceſſe eſt, ut eaſdem rectas nobis exhibeant. FIG. 75.

732. Cæterum, debitis item ſubſtitutionibus peractis, fiet in eadem formula $(an^3 + bmn^2 + cm^2n + dm^3)s^3 + (3an^2 + 2bmn + cm^2)rs^2 + (3an + bm)r^2s + ar^3$ coefficiens ipſius z^3, & $an^3 + bmn^2 + cm^2n + dm^3$ coefficiens ipſius n^3. Unde clare etiam liquet, hujuſmodi transformatione poſſe utramque ex maximis incognitarum poteſtatibus interdum ex æquatione deleri. Nam, ſicuti, æquato nihilo ſecundo coefficiente, habetur pro fractione $m:n$ æquatio

 trium

trium dimenſionum $m^3 : n^3 + cm^2 : dn^2 + bm$: $+ a : d = o$, cujus ope inveſtiganda eſt ratio quam habere debet m ad n; ita, ſi ponatur nihilo æqualis coefficiens alter, habebitur pro fractione $r : s$ æquatio ſecundi gradus $r^2 : s^2 + (3a + bm)r : as + (3an^2 + 2bmn + cm^2) : a = o$ ex qua, ſubrogatis loco m, & n valoribus, quos vi prioris æquationis debent habere, eruere licebit rationem, quæ adſit oportet inter r, & s.

CAPUT III.

Linearum cujuſcumque ordinis diametri, axes, & centra.

733. QUæ præcedenti capite oſtenſa ſunt de transformationibus formularum, quibus lineas cujuſcumque ordinis in unum exhibuimus, habenda ſunt velut totidem lemmata, pro indagandis præcipuis linearum affectionibus. Nunc, lemmata illa ad uſum revocantes, demonſtrare conabimur, qua ratione, eorum ope, ipſæ linearum affectiones præcipuæ debeant inveſtigari. Et quoniam diametrorum, axium, & centrorum conſideratio obtinet, non modo in lineis ſecundi ordinis, verum etiam in iis, quæ ad ordines ſuperiores referuntur; oſtendemus primum hoc capite, quo pacto in lineis cujuſcumque ordinis diametros, axes, & centra liceat definire.

734. Sane in lineis ſecundi ordinis, hoc eſt in circulo, & coni ſectionibus vocatur diameter recta quævis linea, quæ bifariam dividit omnes re-

ectas, alicui æquidiſtanter ductas, & utrinque ad curvam terminatas. Nunc autem, quod de diametris linearum cujuſcumque ordinis agendum aggredimur, operæ pretium eſt, eam diametri notionem, velut propriam linearum ſecundi ordinis, tantiſper deponere, aliamve loco ejus ſubſtituere, paulo generaliorem, & quæ ad lineas ordinum omnium ſe extendat. Interim, ut notio iſta diametri, paulo generalior, rectius intelligatur; ad rem erit, de configuratione linearum cujuſvis ordinis nonnulla prius ſummatim oſtendere.

I. *Configuratio linearum cujuſcumque ordinis, ſummatim oſtenſa.*

735. Quemadmodum natura cujuſque lineæ definitur per æquationem, quæ exprimit nobis relationem inter abſciſſam, & ordinatam correſpondentem; ita ſingula ejuſdem lineæ puncta determinare licebit, inveniendo, ope ejus æquationis, longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet abſciſſæ correſpondet. Ut, ſi quæſtio ſit de determinandis ſingulis punctis ejus lineæ, quæ definitur per æquationem iſtam $y^2 = ax$; ſatis erit, in linea abſciſſarum AB ſumere portionem quamvis AN, & mediante ea æquatione invenire longitudinem ordinatæ correſpondentis NM. Nam, ubi in æquatione $y^2 = ax$ incognita x exhibet datam quamvis portionem AN, jam valor ejus determinatus evadit; & conſequenter etiam incognita y ſuam determinationem ſubeat neceſſe eſt. FIG. 76.

736. Quamquam vero, determinato valore

incognitæ x, etiam valor alterius y determinatus evadat; nihil tamen vetat, quominus alter iſte valor multiplex oriatur: nimirum, ſi contingat, incognitam y in æquatione ad plures dimenſiones aſcendere. Vnde, quotieſcumque id accidit, neceſſe eſt, ut eidem abſciſſæ AN plures quoque ordinatæ NM correſpondeant. Ita in allato exemplo, ob duas dimenſiones, ad quas in æquatione $y^2=ax$ aſcendit incognita y, duos item valores eadem incognita poteſt habere; nam ex æquationis ejus reſolutione eruitur, tum $y=+\sqrt{ax}$, cum $y=-\sqrt{ax}$. Quare eidem abſciſſæ AN duæ etiam ordinatæ NM correſpondebunt, quæ tamen æquales erunt inter ſe, & cadent ad partes contrarias; quum duo illi valores ipſius y ſibi mutuo æquentur, & contrariis ſignis ſint affecti.

737. Id quum ita ſit, perſpicuum eſt, relate ad lineam abſciſſarum AB, ipſam, de qua agitur, lineam poſſe plura crura interdum habere. Si enim contingat, ut uni, eidemque abſciſſæ AN plures ordinatæ NM correſpondeant; plane neceſſe eſt, ut plures iſtæ ordinatæ ad totidem ejuſdem lineæ crura diverſa terminentur. Generaliter autem ſic ſtatui poteſt, ut, relate ad lineam abſciſſarum AB, quælibet linea tot crura habere poſſit, & non plura, quot ſunt dimenſiones, ad quas in lineæ ejus æquatione ordinata y aſcendit. Qua ratione linea, ad quam pertinet æquatio $y^2=ax$, relate ad lineam abſciſſarum AB, habebit duo crura. Et ſimiliter, ſi habeatur linea aliqua, cujus naturam exhibeat æquatio iſta $y^3-axy+x^3=0$; ea, relate ad eamdem lineam abſciſſarum AB, tribus cruribus prædita erit.

738.

738. Neque vero neceſſe eſt, ut omnis linea, relate ad lineam abſciſſarum AB, tot revera habeat crura, quot ſunt dimenſiones, ad quas in ejus æquatione aſcendit incognita y. Fieri enim poteſt, ut in ea æquatione non omnes radices incognitæ y ſint reales. Vnde, pro numero radicum imaginariarum, minor quoque fiet numerus crurum. Ita in utraque harum æquationum $y^3 = a^2x$, $y^3 = ax^2$ incognita y unam habet radicem realem, & duas imaginarias. Quare lineæ, ad quas eæ pertinent æquationes, relate ad lineam abſciſſarum AB, unico tantum crure præditæ erunt. Atque ita quoque in duabus hiſce æquationibus $y^4 = a^3x$, $y^4 = ax^3$ incognita y duas habet radices reales, & alias duas imaginarias. Vnde lineæ, iis æquationibus exhibitæ, reſpectu lineæ abſciſſarum AB, duo crura dumtaxat habebunt.

739. Ad indagandum porro curſum cujuſque cruris, ſatis erit, inquirere, quid accidat valori ejus ordinatæ, quæ ad crus illud terminatur, per totam longitudinem ipſius AB. Vt, ſi æquatio, lineæ naturam definiens, ſit $y^3 = ax^2 - x^3$; habebit in ea incognita y unicam tantum radicem realem, & conſequenter linea ipſa, relate ad AB, unico etiam crure prædita erit. Quum autem habeatur $y = \sqrt[3]{(ax^2 - x^3)}$; liquet, valori ordinatæ, quæ ad crus illud terminatur, tria contingere; primo, ut fiat nullus, quum eſt, vel $x = 0$, vel $x = a$; ſecundo, ut ex poſitivo evadat negativus, quum x major eſt, quam a; & denique, ut ſit ſemper poſitivus, quum abſciſſa ſumitur negativa. Vnde, ſumpta ſuper AB portione AD $= a$, conveniet FIG. 77

crus illud cum AB in punctis A, & D; & ſicuti poſt punctum D cadet ad partem alteram ipſius AB, ita poſt punctum A in eadem parte curſum ſuum proſequetur.

740. Inquirendus ſit quoque curſus trium crurum, quibus referta eſt linea, per æquationem iſtam exhibita $y^3 - axy + x^3 = 0$. Sane in hac æquatione incognita y habet quidem tres radices reales, duas poſitivas, & unam negativam, quotieſcumque abſciſſa x eſt poſitiva, itemque non major, quam $a\sqrt{}^3 4:3$. Nam, ſicuti quum habetur $x = a\sqrt{}^3 4:3$, quælibet radicum poſitivarum ſit æqualis $a\sqrt{}^3 2$; ita, exiſtente x majore, quam $a\sqrt{}^3 4:3$, eædem radices poſitivæ evadent imaginariæ, tantumque radix negativa in realitate ſua perſiſtet. Quocirca, ſi ſuper AB

FIG. 78. capiatur portio $AD = a\sqrt{}^3 4:3$, & per punctum D, ipſi AC æquidiſtanter, ducatur recta $DE = a\sqrt{}^3 2$; duo quidem lineæ crura cadent ad partem unam ipſius AB, ſimulque jungentur in puncto E, nec ultra progredientur; crus vero reliquum cadet ad partem alteram, & cum eadem AB in infinitum abibit.

741. Quoniam autem in eadem æquatione $y^3 - axy + x^3 = 0$ ſinguli valores incognitæ y evaneſcunt, quum ponitur $x = 0$; plane neceſſe eſt, ut ſingula lineæ crura conveniant tam inter ſe, quam cum linea abſciſſarum AB in ipſa ejus origine A. Quumque demum, aſſumpta abſciſſa x negativa, ſemper radices duæ ipſius y fiant imaginariæ, quæque manet realis ſit una ex iis, quæ prius erant poſitivæ; duo adhuc obtineant neceſſe eſt. Primo, ut unum ex cruribus, quæ ſiſtuntur in E, ita quidem cum crure infi-

ni-

nito conveniat in A, ut tamen ex hac parte non ultra progrediantur. Et ſecundo, ut crus alterum, poſt occurſum ejus cum linea abſciſſarum AB in puncto A, non mutata poſitione, pergat in infinitum cum ipſa AB verſus plagam oppoſitam.

742. Jam, quum nobis innoteſcit, tum multitudo crurum, quibus prædita eſt linea aliqua, relate ad lineam abſciſſarum AB, cum curſus eorundem crurum per totam longitudinem ejuſdem AB; configurationis ejus lineæ non exiguam partem compertam habebimus. Quemadmodum autem hujuſmodi configurationem definire docuimus, relate ad lineam abſciſſarum AB; ita eandem licebit quoque determinare, relate ad lineam ordinatarum AC. Nam profecto ſingula alicujus lineæ puncta haberi poſſunt, inveniendo, ope ſuæ æquationis, non modo longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet abſciſſæ correſpondet; verum etiam longitudinem abſciſſæ, quæ refertur ad quamvis ordinatam. Quorſum facit, quod alibi * monuimus: nempe in qualibet linea nihil obſtare, quominus abſciſſæ quidem in ordinatas, & per contrarium ordinatæ in abſciſſas tranſmutentur. * art. 29.

743. Plane vero, etſi lineæ configuratio abſolute conſiderata, eadem ſemper ſit oporteat; fieri tamen poteſt, ut, relate ad lineam ordinatarum AC formam induere videatur, aliam ab ea, quam ſubibat, relate ad lineam abſciſſarum AB. FIG. Ita, ſi lineæ æquatio ſit $x^3 - axy + y^3 = 0$, nihil ſane mutationis occurrit. Nam primo, ſumpta ſuper AC portione $AF = a\sqrt{:4:3}$, & ducta per punctum F, ipſi AB æquidiſtanter, recta

FG $= a\sqrt{3}\,2$; adhuc linea relate ad AC duo habebit crura ex uno latere, quæ ſimul junguntur in G, nec ultra progrediuntur, & crus aliud ex latere alio, quod in infinitum abit cum AC. Et ſecundo, ſicuti unum ex prioribus cruribus ita quidem conjungitur in A cum crure infinito, ut tamen ex hac parte non ultra progrediantur; ita crus alterum poſt punctum A, non mutata poſitione, pergit in infinitum cum ipſa AC verſus plagam oppoſitam.

744. Non perinde vero ſe res habet, ſi lineæ æquatio ſit $x^3 - ax^2 + y^3 = 0$. In hac enim ſi y ſit poſitiva, itemq; non major, quam $a\sqrt{3}4:3$, habebit x tres radices reales, duas poſitivas, & unam negativam. Sicuti vero, exiſtente $y = a\sqrt{3}4:3$, quælibet radicum poſitivarum ſit æqualis $2a:3$; ita, ſi fuerit y major, quam $a\sqrt{3}4:3$, eædem radices poſitivæ evadent imaginariæ.
FIG. 77. Quocirca, ſi ſuper AC capiatur portio AE $= a\sqrt{3}4:3$, & per punctum E, ipſi AC æquidiſtanter, ducatur recta EF $= 2a:3$; non modo linea, relate ad AC, habebit tria crura, verum etiam duo ex iis cadent ad partem unam ipſius AC, ſimulque jungentnr in puncto F, nec ultra progredientur, crus vero reliquum cadet ad partem alteram, & cum eadem AC abibit in infinitum.

745. Et quoniam in eadem æquatione $x^3 - ax^2 + y^3 = 0$, exiſtente $y = 0$, non omnes radices ipſius x evaneſcunt, ſed una ex poſitivis ſit æqualis a; plane neceſſe eſt, ut, ſumpta ſuper AB portione AD $= a$, unum ex cruribus, quæ ſimul junguntur in F, conveniant cum AB in D, alia vero duo eidem occurrant in A.

Quum-

Quumque demum, exiſtente negativo valore ipſius y, unicam habeat radicem realem incognita x, quæ rurſus ſit æqualis a, quum ponitur $y=0$; oportebit quoque, ut crus illud, quod ipſi AB occurrit in D, pergat ulterius poſt occurſum iſtum, & non mutata poſitione, relate ad AC, abeat in infinitum; alia vero duo, quæ ſimul junguntur in A, ſiſtantur ibidem, nec ultra progrediantur.

II. *Diametri notio generalis, ejuſque determinandæ ratio.*

746. Linearum configuratione ſummatim oſtenſa, facile modo erit, intelligere diametri notionem illam, quæ eſt paulo generalior, & ad omnes linearum ordines ſe extendit. Jam enim vidimus, unamquamque lineam, relate ad lineam abſciſſarum AB, tot crura generatim habere, quot ſunt dimenſiones, ad quas in æquatione ejus lineæ aſcendit ordinata y. Itaque, exhibitis lineis ordinum omnium per eas formulas, quas ſupra attulimus: plane neceſſe eſt, ut, relate ad ipſam AB, habeant crus unicum lineæ primi ordinis, crura duo lineæ ſecundi ordinis, crura tria lineæ ordinis tertii, crura quatuor lineæ ordinis quarti, atque ita deinceps.

747. Huic autem conſequens eſt, ut, ſi æquidiſtanter lineæ ordinatarum AC rectæ in lineis ipſis ducantur, iſtæ generaliter occurrere debeant in unico puncto lineis primi ordinis, in duobus punctis lineis ordinis ſecundi, in tribus punctis lineis ordinis tertii, in quatuor pun-

punctis lineis ordinis quarti, atque ita in infinitum. Vnde, pro quolibet ordine linearum, vocabimus diametrum rectam illam, quæ omnes has rectas æquidiſtantes, ad ſingula ipſius lineæ crura terminatas, ſubinde quidem diſpeſcit, ut, ſi capiantur cujuſque ſegmenta, cruribus ipſis, & recta ſecante intercepta, ſumma ſegmentorum ex uno latere ſit ubique æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio.

748. Dari vero in ſingulis lineis rectam, quæ eas parallelas ſubinde diſpeſcit, haud difficile erit oſtendere. Scribendo enim in æquatione lineæ
art. 682. mu loco x, & $z + nu + p$ loco y; jam vidimus, transformatione iſta, ſemper fieri poſſe, ut, ordinata æquatione relate ad incognitam z, ſecundus ejus terminus evaneſcat. Id ergo ſi fiat, ob defectum ſecundi termini, non modo radices
art. 447. lib. 2. ipſius z erunt, partim poſitivæ, partim negativæ; verum etiam ſumma ex radicibus poſitivis æqualis erit ſummæ ex radicibus negativis. Unde omnino neceſſe eſt, ut nova linea abſciſſarum, in quam prior commutatur, ſubinde dividat omnes rectas, ipſi AC æquidiſtanter ductas, & ad ſingula lineæ crura terminatas, ut ſumma ſegmentorum ex latere uno ſit æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio.

749. Neque vero putandum eſt, in qualibet linea unicam tantum diametrum dari. Sane enim, ubi rectæ, a diametro dividendæ, ipſi AC ſunt parallelæ, unica tantum erit diameter. Sed nihil obſtat, quominus rectæ illæ alteri cuidam capiantur æquidiſtantes. Jam enim vidimus ſupra, in ſingulis linearum ordinibus, manente eadem linea abſciſſarum, poſſe lineam ordinatarum

rum in aliam, atque aliam commutari. Itaque, ſi fiat mutatio iſta, licebit, eadem ratione *, pro omnibus iis mutationibus, in quibus non evaneſcit maxima poteſtas ordinatæ, totidem quoque diametros reperire. Quod quum ita ſit, dicendum eſt, in quolibet linearum ordine diametrum eſſe quamvis rectam, quæ ita quidem dividit omnes rectas, alicui æquidiſtanter ductas, & ad ſingula lineæ crura terminatas, ut ſumma ſegmentorum ex uno ſecantis latere ſit æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio. *Art. 748.

750. Poſſunt interim omnes infinitæ diametri, quarum linea alicujus ordinis eſt capax, in in unum coire: ſcilicet, ſi, inventa diametro una; æquatio ipſius lineæ relate ad eam diametrum talis oriatur, ut, mutando lineam ordinatarum in aliam, priori utcumque inclinatam, hoc eſt, ſcribendo rz loco y, & $u + sz$ loco x, nova æquatio relate ad incognitam z adhuc ſecundo termino careat. Id enim quum contingit, plane neceſſe eſt, ut linea abſciſſarum, etiam relatu ad novas ſuas ordinatas, vices ſubeat diametri. Quod ſi autem, transformatione illa, redeat in æquatione ſecundus terminus, ſed coefficiente, qui nihil contineat variabilis; tunc diametri omnes parallelæ fient inter ſe. Nam, ad eum delendum, mutare oportebit * lineam abſciſſarum in aliam, quæ ei ſit parallela. *Art. 676. 686.

751. Pro ſingulis autem linearum ordinibus, licebit, circa diametros hoc generale theorema ſtatuere, quod, ſi intra lineam ducantur plures rectæ parallelæ, quarum quælibet ei occurrat in tot punctis, quot exponens ſui ordinis deſignat; recta, quæ ita ſecat duas earum

pa-

parallelárum, ut ſumma ſegmentorum ex uno latere ſit æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio, ſecabit eadem lege omnes alias rectas parallelas, & conſequenter erit ipſius lineæ diameter. Nec ſane difficile erit, theorema iſtud oſtendere. Debet ſiquidem, pro rectis iis parallelis, dari * diameter aliqua. Itaque, quum ea tranſire debeat per duo illa puncta, in quibus jam ſectæ ſunt priores duæ parallelæ ea, qua opus eſt, lege; & per duo data puncta poſitio rectæ determinetur: plane neceſſe eſt, ut recta, quæ priores duas parallelas jam ſubinde ſecat, ſit omnium earum parallelarum diameter.

*art. 749.

752. Dubium autem hic oritur, quod interdum linea aliqua pertinet ad aliquem ordinem, nec tamen in ejus æquatione ſpeciali ordinata aſcendit ad tot dimenſiones, quot exponens ſui ordinis deſignat. Id enim quum contingit, non videtur, qua ratione fieri poſſit, ut linea illa talem diametrum habeat, qualem exigit ordo ejus. Sed nihil inde metuendum, quod veritatem ejus evertat, quod modo dictum eſt. Nam, ſi in æquatione ejus lineæ, ſcribendo rz loco y, & $u + sz$ loco x, mutetur linea ordinatarum in aliam, ei utcumque inclinatam, jam nova habebitur æquatio, in qua ordinata z aſcendet ad eum gradum, quem exponens ordinis oſtendit. Unde, mutata ſubinde æquatione lineæ, jam, pro infinitis rationibus, quas r ad s poteſt habere, infinitas diametros invenire licebit, quæ ſint ejus naturæ, quales a lineæ ordine requiruntur.

753. Illud potius nonnihil negotii faceſſit, quod fieri interdum poteſt, ut in lineæ æqua-

tio-

tione aſcendat quidem ordinata ad eum gradum, quem exponens ſui ordinis deſignat; ſed linea ipſa, ob aliquas ejus ordinatæ radices imaginarias, non habeat, relate ad lineam abſciſſarum, tot crura, quot indicat idem ordinis exponens. Verum, quum id contingit, ſupplenda ſunt crura deficientia per ipſas ordinatæ radices imaginarias; & adhuc habenda velut diameter nova illa abſciſſarum linea, cujus ope ſecundus ex æquatione terminus deletur. Neque aliter fieri debet, ſi linea habeat quidem tot crura realia, quot ab exponente ſui ordinis indicantur; ſed quædam ex iis, ob aliquas ordinatæ radices, quæ poſt terminum aliquem evadunt imaginariæ, ſiſtuntur eo in loco, nec cum aliis cruribus, ulterius pergentibus, continuantur. Nam, ſimiliter per ordinatas imaginarias, continuanda ſunt etiam in infinitum crura illa, quæ alicubi ſiſtuntur.

754. Et ſane radices imaginariæ in æquationibus binatim ſemper occurrunt; & in iis, ſicuti communis quantitas realis eodem ſigno affecta ſit * oportet, ita communis quantitas imaginaria contrariis ſignis affici debet. Finge igitur $a + \sqrt{-b}$, & $a - \sqrt{-b}$ eſſe duas alicujus ordinatæ radices imaginarias. Jamque, ſi AN ſit abſciſſa, cui eæ correſpondent, per ea, quæ alibi * dicta ſunt, ſubinde illas deſignare oportebit, ut, ducta ipſi AC æquidiſtanter recta NO $= a$, debeant hinc inde ſuper NO erigi perpendicula OM, O*m* talis longitudinis, ut ſit, tam OM, quam O*m* $= \sqrt{b}$. Plane vero puncta M, & *m*, quum deflectant a curſu ipſius NO, ad lineam non pertinebunt; ſed, iis adhibitis, ob partes

* *art.* 335. *lib.* 2.

FIG. 79.

* *art.* 351. 409. *lib.* 1.

OM,

OM, Om, quæ, velut ad contrarias partes tendentes, ſe mutuo deſtruunt, ſemper verum erit, quod, relate ad diametrum, ſumma ſegmentorum ex uno latere ſit æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio.

755. Diametri igitur notione ad ſuam univerſalitatem revocata, abunde, opinor, liquet, non modo lineas ſecundi ordinis, ſed eas quoque, quæ ad ordines pertinent ſuperiores, infinitas diametros habere. Quum autem ex æquatione, in qua ordinata gerit vices incognitæ, ſecundus per diametrum terminus deleatur; manifeſtum eſt, relate ad ipſam diametrum, debere eſſe $ey^2 + (gx^2 + ix + k) = 0$ formulam linearum ſecundi ordinis, $ay^3 + (cx^2 + fx + b)y + (dx^3 + gx^2 + ix + k) = 0$ formulam linearum ordinis tertii, atque ita deinceps: adeo nempe, ut eædem illæ formulæ paulo generaliores, quas pro ſingulis linearum ordinibus ſuperius exhibuimus, dabunt nobis formulas earundem linearum, relate ad diametrum, ponendo nihilo æquales eos coefficientes, per quorum deſtructionem evaneſcit in formulis ſecundus terminus, ubi relate ad incognitam y ordinantur.

756. Cæterum non eſt hic reticendum, quod, ſi, ſcribendo rz loco y, & $u + sz + q$ loco x, fiat, ut in æquatione, ordinata relate ad incognitam u, ſecundus terminus evaneſcat; etiam nova linea ordinatarum, in quam transformatione illa prior commutatur, velut lineæ diameter debet haberi. Jam enim vidimus ſuperius *, nihil obſtare, quominus abſciſſæ quidem in ordinatas, ordinatæ vero in abſciſſas tranſmutentur. Itaque, ſi, poſt eam transformationem, fiat

* art. 29.

com-

commutatio iſta ; ob defectum ſecundi termini, plane neceſſe eſt, ut nova illa linea ordinatarum lineæ diameter evadat. Sed, relate ad hujuſmodi diametrum, liquet, debere eſſe $gx^2 + (ey^2 + by + k) = 0$ formulam linearum ſecundi ordinis, $dx^3 + (by^2 + fy + i)x + (ay^3 + ey^2 + by + k) = 0$ formulam linearum tertii ordinis, atque ita deinceps.

III. *Diſtinctio diametrorum in genera, ubi etiam de diametris curvilineis.*

757. Quemadmodum cujuſque ordinis lineæ, ſaltem per ordinatas imaginarias, tot habent crura, relate ad aliquas lineas abſciſſarum, quot exponens ordinis indicat; ita, pro ſingulis linearum ordinibus, vocavimus diametrum rectam quamvis, quæ ita quidem diſpeſcit omnes rectas alicui æquidiſtanter ductas, & ad omnia lineæ crura terminatas, ut ſumma ſegmentorum ex uno ſecantis latere adæquet ſummam ſegmentorum ex latere alio. Quum autem notio iſta generalis diametri aliam, atque aliam induat formam, prout alius, atque alius eſt ordo linearum; ad rem erit, pro variis formis, quas ſubire poteſt, varia diametrorum genera diſtinguere; & vocare diametrum primi generis, quæ lineis ſecundi ordinis competit; diametrum ſecundi generis, quæ ad lineas refertur ordinis tertii; diametrum tertii generis, quæ propria eſt linearum ordinis quarti; atque ita deinceps.

758. Hac diametrorum diſtinctione ſuppoſita, liquet, diametrum primi generis ſecare re-

ctas ſuas æquidiſtantes in duo tantum ſegmenta, quæ æqualia erunt inter ſe. Non perinde vero ſe res habet in diametris aliorum generum. Quæ enim ſecundi eſt generis, ea dividet quamlibet rectarum æquidiſtantium in tria ſegmenta; & ſumma duorum ſegmentorum, ad unam diametri partem exiſtentium, æqualis erit tertio ſegmento, quod exiſtit ad partem alteram. Pariterque, quæ eſt tertii generis, ea ſecabit unamquamque parallelarum in quatuor ſegmenta: ex quibus ſi tria exiſtant ex uno ſecantis latere, & quartum ex latere alio, fiet iſtud æquale iis tribus ſimul ſumptis; quod ſi autem duo quidem jaceant ad partem unam, & alia duo ad partem aliam; ſumma iſtorum, & ſumma illorum æquales erunt inter ſe.

759. Præſtat autem, inſtituere hujuſmodi diametrorum in genera diſtinctionem. Nam, etſi omnis linea, quæ alicujus ſit ordinis, infinitas habeat diametros, quæ ad eum ordinem pertinent; fieri tamen poteſt, ut præter eas, habeat quoque diametros alias, quæ propriæ ſint alicujus ex ordinibus inferioribus. Unde, ne communi voce diametri decipiamur; ad rem erit, eas ſecundum proprium ſuum genus a ſe mutuo diſtinguere. Ita linea, per æquationem iſtam exhibita $ay^2 + 2a^2y = x^3$, eſt tertii ordinis. Quare infinitis diametris prædita eſſe debet, quæ ad tertium ordinem pertinent. Plane vero, ſi, ſcribendo in ea æquatione $z - a$ loco y, vertatur linea abſciſſarum in aliam, quæ ei ſit parallela; habebitur $az^2 - a^3 = x^3$. Unde, quum in hac æquatione ordinata z duos habeat valores æquales, & contrarios; liquet, novam lineam abſciſ-

ſciſſarum eſſe diametrum primi generis.

760. Et quidem jam vidimus ſupra *, quod, *Art. 704.
ubi in linea alicujus ordinis mutatur linea ordinatarum in aliam, ei utcumque inclinatam, fieri quandoque poteſt, ut ex æquatione ejus lineæ maxima ordinatæ poteſtas deleatur. Itaque, ſi, ea deleta, maneat in æquatione poteſtas ejuſdem ordinatæ, proxime minor, &, mutando lineam abſciſſarum in aliam, tolli adhuc poſſit ex æquatione terminus ille, in quo poteſtas ordinatæ, alio adhuc gradu inferior, reperitur: plane neceſſe eſt, ut linea illa, præter infinitas diametros, quæ ſui ordinis ſunt propriæ, habeat etiam diametros alias, quæ pertineant ad ordinem proxime inferiorem: adeo nempe, ut, ſi linea ſit tertii ordinis, ea prædita erit, non modo infinitis diametris ſecundi generis, verum etiam diametris aliis generis primi.

761. Neque vero putandum eſt, alias iſtas diametros, quas habere poteſt linea alicujus ordinis, eſſe ſemper ordinis proxime inferioris. Sane enim ad ordinem aliquem ſuperiorem pertinere non poſſunt; ſed nihil obſtat, quominus ad quemvis pertineant ordinum inferiorum. Ita linea, per æquationem iſtam exhibita $a^2y^2 + 2a^2by = x^4$ eſt quarti ordinis; &, utpote talis, infinitas habet diametros generis tertii. Verum, quia, ſcribendo in ea æquatione $z - b$ loco y, & mutando hac ratione lineam abſciſſarum in aliam, quæ ei ſit parallela, habetur $a^2z^2 - a^2b^2 = x^4$; liquet, novam lineam abſciſſarum eſſe diametrum generis primi; quum binæ ordinatæ, quæ cuivis abſciſſæ hinc inde correſpondent, inter ſe ſint æquales.

762. Interim, ſi contingat, ut linea aliqua præter infinitas diametros, quæ ſunt ſui ordinis propriæ, alias habeat ordinis proxime inferioris, non plures poterit habere, quam indicat exponens ordinis, ad quem linea pertinet. Jam enim, ut fiat locus aliis hiſce diametris, neceſſe

*art.760. prius eſt *, ut, mutando lineam ordinatarum in aliam, ei utcumque inclinatam, deleri poſſit ex æquatione ipſius lineæ maxima ordinatæ poteſtas. Quia vero, ad mutationem illam peragendam,

*art.693. ſcribendum eſt * rz loco y, & $u + sz$ loco x; liquet, æquationem, qua determinanda eſt ratio ipſarum r, & s, quo maxima ipſius y poteſtas evaneſcat, ad eundem gradum aſcendere, cujus eſt æquatio lineæ. Unde, ſicuti quot exiſtunt in ea æquatione radices, toties, & non amplius, deleri poteſt ex æquatione lineæ maxima ordinatæ poteſtas; ita ex numero earundem radicum quæſita diametrorum, de quibus agitur, multitudo repeti debet.

763. Itaque diametri, quæ ſint ordinis proxime inferioris, dari poterunt; tres, & non plures in lineis ordinis tertii; quatuor, & non plures in lineis ordinis quarti; quinque, & non plures in lineis ordinis quinti; atque ita deinceps. Plane vero, ſicuti ex numero radicum, quæ exiſtunt in ea æquatione, deducendus eſt numerus diametrorum ordinis proxime inferioris, quas linea alicujus ordinis poteſt habere; ita, ſi contingat, ut aliquæ ex iis radicibus ſint imaginariæ, fient quoque impoſſibiles totidem harum diametrorum. Unde rurſus ex hujuſmodi diametris dabuntur; vel una, vel tres in lineis ordinis tertii; vel duæ, vel quatuor in lineis ordinis quar-

quarti; vel una, vel tres, vel quinque in lineis ordinis quinti; atque ita in infinitum. Nam radices imaginariæ in æquationibus ſemper* binatim occurrunt.

* art. 430. lib. 2.

764. Cæterum ſedulo hic notari debet, quod, ut linea alicujus ordinis habeat quoque diametros ordinis proxime inferioris, haud quidem ſatis eſt, poſſe ex æquatione deleri maximam ordinatæ poteſtatem; ſed requiritur quoque, ut, ea deleta, maneat in æquatione poteſtas ordinatæ, proxime minor, & ut, mutando lineam abſciſſarum in aliam, deleri quoque poſſit ex æquatione terminus ille, in quo poteſtas ejuſdem ordinatæ, alio adhuc gradu inferior, reperitur. Ita, ſi habeatur linea tertii ordinis, &, deleto cubo ordinatæ, ſit $ay^2 + 2aby = x^3$ æquatio ipſius lineæ, habebit quidem illa diametrum generis primi; quandoquidem, mutando lineam abſciſſarum, delere licebit ex eadem æquatione terminum $2aby$. Verum, ſi, cubo ordinatæ deleto, lineæ æquatio induat ſemper hanc formam $xy^2 + 2aby = x^3$, nulla erit in linea diameter primi generis; quum, mutando lineam abſciſſarum in aliam, deleri nequeat ex ea æquatione terminus $2aby$.

765. Ut enim ex æquatione $xy^2 + 2aby = x^3$ deleri poſſit terminus $2aby$, ſcribendum eſt in ea $z - ab : x$ loco y; hoc eſt, augendi ſunt valores incognitæ y quantitate variabili $ab : x$. Plane vero, quum ii valores ſubinde augentur, non quidem ad rectam aliam, ſed ad hyperbolam conicam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, terminantur. Nam, vocando u eandem illam quantitatem variabilem, habetur æquatio $u = ab : x$,

ſive etiam $xu = ab$, quæ ad illiuſmodi hyperbolam nos ducit. Unde procul eſt, ut, defectu ejus termini, quæſita diameter habeatur: niſi velimus, in cenſum diametrorum admittere etiam curvas, quæ ſubinde dividunt rectas omnes æquidiſtantes, ut ſumma ſegmentorum ex uno ſecantis latere ſit æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio.

766. Cur autem non ſint admittendæ, plane non video; eoque magis, quod eæ quoque, perrimandis linearum affectionibus, uſui nobis eſſe poſſunt. Sed, iis admiſſis, jam generalior adhuc evadet notio diametri. Et, ſicuti diametrorum omnium aliæ erunt rectilineæ, aliæ curvilineæ; ſic, tam illæ, quam iſtæ in varia genera erunt diſtinguendæ. Illud interim circa diametros curvilineas occurrit, notatu dignum, quod, earum ope, linearum æquationes poſſunt interdum altius aſſurgere. Sic, in æquatione $xy^2 + 2aby = x^3$, ſcribendo $z - ab : x$ loco y, habetur loco ejus hæc alia $xz^2 - a^2b^2 : x = x^3$, ſive $x^2z^2 - a^2b^2 = x^4$: quæ quidem, non trium, ſed quatuor dimenſionum deprehenditur. Nec id mirum videri debet. Nam, quum diameter eſt curvilinea, abſciſſæ, quæ adhuc ſuper recta poſitione data capiuntur, cum ordinatis ſuis non conjunguntur.

IV. *Ratio inveniendi, tum axes, cum diametros conjugatas linearum cujuſque ordinis.*

767. EGimus generatim de diametris linearum cujuſque ordinis; nunc de iis, quæ vel conjugatæ, vel axes dicuntur, ſpeciatim agendum nobis erit. Ac primo quidem in

qualibet linea vocantur conjugatæ binæ dia-
etri, quæ tales deprehenduntur, ut una ſit pa-
llela ordinatis alterius. Neque vero putandum
t, in ſingulis lineis quamlibet diametrum habe-
: conjugatam ſuam correſpondentem. Accidit
l enim in lineis ſecundi ordinis, hoc eſt in cir-
ılo, & coni ſectionibus; verum in lineis altio-
ım ordinum nonniſi quædam dantur diametri,
uibus aliæ totidem, velut conjugatæ, corre-
pondent.

768. Et quidem in lineis ſecundi ordinis
on aliunde evenit, ut quælibet diameter ſuam
abeat conjugatam, quam quia æquatio earum
inearum, relate ad ipſam diametrum, habet ſem-
er * formam iſtam $ey^2 + (gx^2 + ix + k) = 0$. *art.755.
Hinc enim fit, ut, ordinata eadem æquatione re-
ate ad incognitam x, ita nempe, ut ſit $gx^2 +$
$ix + (ey^2 + k) = 0$, poſſit ſemper * deleri ex *art.676.
ea ſecundus terminus, mutando lineam ordina- 686.
tarum in aliam, quæ ei ſit parallela; quum coef-
ficiens ejus termini ſit conſtans, nec quicquam
contineat variabilis. Unde, eo deleto, nova
linea ordinatarum, non modo erit * diameter *art.749.
ipſius lineæ, verum etiam fiet conjugata * diame- *art.767.
tri prioris.

769. Non perinde vero ſe res habet in li-
neis ordinum ſuperiorum. Finge enim, eas eſſe
ordinis tertii; & ipſarum æquatio relate ad dia-
metrum erit ſemper * hujus formæ $ay^3 + (cx^2$ *art.755.
$+ fx + b)y + (dx^3 + gx^2 + ix + k) = 0$.
Unde eadem æquatio, ordinata relate ad inco-
gnitam x, fiet $dx^3 + (cy + g)x^2 + (fy + i)x +$
$(ay^3 + by + k) = 0$: in qua ſecundus terminus
deleri nequit, mutando lineam ordinatarum in

aliam, quæ ei ſit parallela; quum ejus coeffici- $cy + g$ ſit partim conſtans, partim variabil- Quod autem accidit in lineis tertii ordinis, il- lud idem in ſuperiorum quoque ordinum line- occurrit: indeque eſt, ut tantum in lineis ſe- cundi ordinis quælibet diameter ſuam habe- conjugatam correſpondentem.

770. Interim, facile erit oſtendere, in line- ordinum ſuperiorum dari poſſe aliquas diame- tros, quibus aliæ totidem, velut conjugatæ, cor-
*art. 728. reſpondeant. Jam enim obſervavimus ſupra * quod, mutando lineam abſciſſarum, & lineam ordinatarum in alias, quæ, eis occurrentes in ip- ſa earum origine, utcumque ad eaſdem inclinen- tur, fieri interdum poteſt, ut coefficiens ſecun- di termini, relate ad quamcumque incognitam ordinetur æquatio, ſit ſemper quantitas con- ſtans. Itaque, ſi, quum id fieri poteſt, demus operam, ut revera fiat; jam licebit, per rectas alias, iis parallelas, omnino ſecundum termi- num tollere: & propterea aliæ iſtæ rectæ non
*art. 749. modo erunt * lineæ diametri, verum etiam una
*ar. 767. fiet alterius * conjugata.

771. Ita formula linearum tertii ordinis erit $ay^3 + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + l$ $= 0$, ubi fieri poteſt, ut evadat in ea quantitas conſtans coefficiens ſecundi termini, quæcum- que ſit incognita, relate ad quam ordinetur æ- quatio. Plane vero, ſi, ſcribendo in eadem æ- quatione $u - g : 3d$ loco x, & $z - e : 3a$ loco y, mutentur linea abſciſſarum, & linea ordina- tarum in alias, quæ ipſis ſint parallelæ; habe- bitur loco ejus hæc alia $az^3 + du^3 + fuz + (h$ $- e^2 : 3a - fg : 3d, z + (i - g^2 : 3d - ef : 3a) u$

$+ (2e^3 :$

$+ (2e^3 : 27a^2 + 2g^3 : 27d^2 + feg : 9ad - be : 3a - gi : 3d + k) = 0.$ in qua, relate ad utramque incognitam, deeſt ſecundus terminus. Vnde, ſicuti, tum nova linea abſciſſarum, cum nova linea ordinatarum haberi debet velut lineæ diameter; ita, quum una fiat parallela ordinatis alterius, alteram alterius conjugatam eſſe* oportebit. *ar. 767.

772. Id vero quum ita ſit, liquido patet, quod, ſicuti, tunc demum in linea alicujus ordinis dantur nonnullæ diametri, quæ ſuas habent conjugatas correſpondentes, quotieſcumque in æquatione ejus lineæ fieri poteſt, ut coefficiens ſecundi termini, relate ad utramque incognitam, evadat quantitas conſtans; ita tot dabuntur, & non plures hujuſmodi diametri, quot vicibus id præſtare licebit. Vnde in lineis ordinis tertii diametri, ad quas aliæ totidem, velut conjugatæ, correſpondent, erunt, vel una, vel tres. Nam vidimus ſuperius *, in æquatione talium linearum, vel ſemel, vel ter fieri poſſe, ut coefficiens ſecundi termini, relate ad utramque incognitam, quantitas conſtans evadat. *art. 730.

773. Reticere autem hic nolo, quod fieri interdum poteſt, ut diameter, quæ alicui, velut conjugata, correſpondet, non ſit ejuſdem generis cum diametro principali, ſed generis alicujus inferioris. Ita, ſi lineæ æquatio ſit $y^3 - a^2y = ax^2 - 2abx$; ea, ordinata relate ad incognitam y, jam ſecundo termino caret. Quare, ob defectum ſecundi termini, linea abſciſſarum jam eſt una ex diametris, quæ propriæ ſunt ejus ordinis, cujus eſt linea. Plane vero, quia in eadem æquatione, ordinata relate ad incognitam

x, coefficiens ſecundi termini $-2abx$ ni[l] continet variabilis; eliminare eum licebit, m[u]tando lineam ordinatarum in aliam, quæ ei [ſit] parallela, hoc eſt, ſcribendo $u+b$ loco x. Q[ua] ratione fiet quidem nova linea ordinatarum co[n]jugata diametri prioris; ſed erit, non ſecu[ndi] ſed primi generis.

774. Secundo in qualibet linea axis no[mi]ne venit diameter illa, quæ, quum ſit ejus o[r]dinis, cujus eſt linea, ſecat ſuas ordinatas a[d] angulos rectos. Licebit autem, hujuſmodi di[a]metrum determinare, ſcribendo in æquatio[ne] lineæ $mu+msz$ loco y, & $rz+nsz+nu$ loco x; hoc eſt *, mutando lineam abſciſſarum AB, & lineam ordinatarum AC in alias AH, Ab, quæ, eis occurrentes in ipſa earum origine A, utcum[que] que ad eaſdem inclinentur. Hac enim transfor[ma]tione duo ſimul poterunt obtineri; primum, ut angulus HAb rectus oriatur; & alterum, ut, ordinata æquatione relate ad incognitam u, coef[fi]ciens ſecundi termini nihil contineat variabi[li]s. Unde, duobus hiſce comparatis, plane ne[ce]ſſe eſt, ut diameter, quæ rectas, ipſi Ab æ[qui]diſtantes, velut ſuas ordinatas agnoſcit, axis fiat ipſius lineæ.

* art. 721. FIG. 75.

775. Ponamus itaque, rectum eſſe angulum HAb. Jamque, producta Ab, uſque donec con[ve]niat cum DE in I, rectus etiam erit angulus DAI. Unde, demiſſo ſuper DI perpendiculo AL; erit, ut DL ad AL, ita AL ad IL. Plane vero ſi radius ſit ad ſinum ſecundum anguli BAC, ſive ADL, ut eſt 1 ad t; erit primo EL $= tm$, ſecundo DL $= n + tm$, ac denique AL $= m\sqrt{(1-t^2)}$. Quare, quum fiat IL $= (m^2 -$

$t^2m^2)$

t^2m^2) : $(n + tm)$; erit tota DI $= (n^2 + 2tmn + m^2) : (n + tm)$. Sed, ob triangula æquiangula IDA, A*ed*, DI eſt ad AD, ut A*e* ad *de*. Itaque erit, ut $(n^2 + 2tmn + m^2) : (n + tm)$ ad 1, ita *r* ad *s* : & propterea, quo angulus HA*b* rectus oriatur, neceſſe eſt, quatuor indeterminatas m, n, r, s ſubinde aſſumere, ut fiat $r : s = (n^2 + 2tmn + m^2) : (n + tm)$.

776. Jam pro eo, quod quærimus, ratio ipſius *r* ad *s* talis etiam eſſe debet, ut, ordinata æquatione relate ad incognitam u, coefficiens ſecundi termini nihil contineat variabilis. Fiat ergo æquationis transformatio ; & pars variabilis ejus coefficientis ponatur nihilo æqualis. Hac autem ratione valor fractionis $r : s$ iiſdem indeterminatis m, & n paulo aliter expreſſus orietur. Unde, æquatis inter ſe duobus ejus valoribus diverſis, habebitur æquatio, quæ radicibus ſuis oſtendet, qualis eſſe debeat ratio ipſius m ad n, ut duo illa ſimul eveniant. Et perſpicuum eſt, quot dari in hac æquatione radices reales, tot etiam axes habere lineam, de qua agitur : in tantum, ut, ſi omnes ejus radices fuerint imaginariæ, linea ipſa erit omnino axe deſtituta.

777. Sed exemplo rem oſtendamus. Itaque capiatur formula linearum ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Jamque, ſcribendo in ea $mu + msz$ loco y, & $rz + nsz + nu$ loco x; fiet $(2em^2 + 2fmn + 2gn^2)s + (fm + 2gn)r$ coefficiens ipſius uz : proindeque idem, nihilo æquatus, dabit $r : s = -(2em^2 - 2fmn - 2gn^2) : (fm + 2gn)$. Quamquam vero valor iſte ſit negativus, idem tamen ad opus noſtrum

po-

poſitive oportet adhibeatur ; quum ejus negatio dumtaxat argumento nobis eſſe debeat, quod, in determinanda poſitione rectæ Ab, ducenda eſt ed ad plagam oppoſitam. Itaque erit $(2em^2 + 2fmn + 2gn^2) : (fm + 2gn) = (n^2 + 2tmn + m^2) : (n + tm)$: unde eruitur $m^2 : n^2 + (2e - 2g) m : (2te - f) n + (f - 2tg) : (2te - f) = 0$.

778. Quum ergo in hac æquatione fractio $m : n$, quæ gerit vices incognitæ, ad duas dimenſiones aſcendat ; erunt ipſius duo valores diverſi. Unde lineæ ſecundi ordinis duos axes habebunt. Nec ſane fieri poteſt, ut valores illi evadant unquam imaginarii. Nam quantitas, quæ reperitur in utroque valore ſub ſigno radicali eſt $e^2 - 2eg + g^2 + f^2 - 2tef - 2tfg + 4t^2eg$. Hanc vero poſitivam eſſe, facile quidem erit oſtendere. Quum enim quadratum ex $f - te - tg$ poſitivum ſit oporteat; erit $f^2 + t^2e^2 + 2t^2eg + t^2g^2$, ſive $f^2 + t^2e^2 - 2t^2eg + t^2g^2 + 4t^2eg$ major, quam $2tef + 2tfg$. Sed $t^2e^2 - 2t^2eg + t^2g^2$ minor eſt, quam $e^2 - 2eg + g^2$. Itaque erit $f^2 + e^2 - 2eg + g^2 + 4t^2eg$ multo major, quam $2tef + 2tfg$: & propterea quantitas $f^2 + e^2 - 2eg + g^2 + 4t^2eg - 2tef - 2tfg$ erit poſitiva.

779. Cæterum non diſſimili ratione in ſingulis linearum ordinibus invenire licebit diametrum, quæ cum ordinatis ſuis datum quemvis
FIG. 75. angulum conſtituat : nimirum, mutando lineam abſciſſarum AB, & lineam ordinatarum AC ſubinde in alias duas AH, Ab, ut angulus H A b oriatur æqualis angulo dato ; & ut, ordinata æquatione relate ad incognitam x, coefficiens ſecun-

cundi termini nihil contineat variabilis. Neque vero id factu difficile erit. Nam, ſicuti, demiſſo ſuper DE perpendiculo AL, & poſito, quod radius ſit ad ſinum ſecundum anguli BAC, ut eſt 1 ad t, fit EL $= tm$, & DL $= n + tm$; ita, ſi fiat angulus DAK æqualis angulo CAb, erit angulus AKD æqualis angulo Ade: proindeque, dato angulo HAb, dabuntur in triangulo AEK anguli omnes; & conſequenter dabitur quoque ratio laterum AE, EK: quæ proinde ſi ponatur æqualis ei, quam habet 1 ad l, fiet EK $= lm$, & DK $= n + lm$.

780. Quum autem producta Ab, uſque donec conveniat cum DE in I, fiant triangula Aed, IDA adhuc æquiangula; erit, ut de ad Ae, ita AD ad DI; hoc eſt, ut s ad r, ita 1 ad DI. Quare erit DI $= r : s$. Sed, ob triangula IDA, ADK, ſimiliter æquiangula, DI eſt ad AD, ut AD ad DK. Itaque, quum fiat rectangulum IDK æquale quadrato ex AD, ſive æquale duobus quadratis AE, DE una cum duplo rectanguli DEL; erit $(n + lm)\, r : s = m^2 + n^2 + 2tmn$, hoc eſt $r : s = (m^2 + n^2 + 2tmn) : (n + lm)$. Unde, ſi ejuſdem fractionis $r : s$ capiatur alter ille valor, qui oritur, efficiendo, ut evaneſcat pars variabilis coefficientis ſecundi termini, quum æquatio ordinatur relate ad incognitam x, & duo iſti valores æquentur inter ſe; habebitur æquatio, quæ radicibus ſuis oſtendet, qualis eſſe debeat ratio ipſius m ad n, ut id, de quo agitur, poſſit obtineri.

781. Ut, quoniam in formula linearum ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ habetur * quoque $r : s = (2em^2 + 2fmn + 2gn^2)$: * art. 777.

$2gn^2) : (fm + 2gn)$; erit $(2em^2 + 2fmn + 2gn^2) : (fm + 2gn) = (m^2 + n^2 + 2tmn) : (n + lm)$: unde eruitur $m^2 : n^2 + (2e - 2g + 2lf - 2tf)m : (2el - f)n + (f + 2lg - 4tg) : (2el - f) = 0$. Quumque in hac æquatione, velut ſecundi gradus, fractio $m : n$ duos habeat valores diverſos, qui tamen fieri poſſunt imaginarii, quum habetur $4eg$ major, quam f^2; liquet, in lineis ſecundi ordinis duas poſſe diametros reperiri, quæ cum ſuis ordinatis datum angulum conſtituant, tantumque in ellipſi fieri interdum poſſe, ut impoſſibiles evadant binæ hujuſmodi diametri.

V. *Quomodo definire liceat centrum in lineis ordinum omnium.*

782. Sequitur, ut de centris linearum ordinum omnium ſermonem inſtituamus. Vocamus autem centrum in qualibet linea concurſum omnium diametrorum, quæ ſunt ejuſdem ordinis, cujus eſt linea. Ut enim in lineis ſecundi ordinis, hoc eſt in circulo, & coni ſectionibus, diametri omnes ad unum idemque punctum convergunt, quod tamen in parabola in infinitum novimus * abire; ita in lineis
*Art. 249. ordinum ſuperiorum fieri interdum poteſt, ut ipſarum diametri omnes, propriis earundem ordinibus correſpondentes, in uno eodemque puncto, ſive in finita, ſive in infinita diſtantia, conveniant. Itaque punctum iſtud, ſi quod datur in iis, vocabitur centrum ipſarum; & oſtendendum nunc nobis erit, tum quomodo cognoſci poſſit, num linea aliqua centro ſit prædita, cum item qua ratione centri ejus, ſi quod habet, poſitio-

tionem liceat definire.

783. Primo igitur fiat, ut æquatio lineæ ſubeat eam formam, qualem habeat oportet, relate ad diametrum: ita nempe, ut, habita æquationis ejus ratione, linea ipſa abſciſſarum AB ſit lineæ diameter. Tum, ſcribendo in ea æquatione rz loco y, & $u+sz$ loco x, vertatur linea ordinatarum AC in aliam quamvis Ab, utcumque ad eam inclinatam. Determinetur porro diameter FG, quæ velut ſuas ordinatas agnoſcat rectas, ipſi Ab parallelas. Jamque, determinatione iſta, non modo notus evadet valor ipſius AF; verum etiam acta, tum per punctum A recta AH, æquidiſtanter ipſi FG, cum per punctum quodvis D iſtius AH recta DE, alteri Ab parallela, quæ conveniat cum AB in E, innoteſcet ratio, quam habet DE ad AE. Unde demum, producta FG, uſque donec conveniat cum AB in V; ob triangula æquiangula DEA, FAV cognoſcetur pariter longitudo ipſius AV; & conſequenter nota fiet poſitio puncti V. FIG. 80.

784. Jam, quum recta Ab valeat nobis exhibere omnes rectas, quæ ex puncto A duci poſſunt; liquet, diametrum FG omnes lineæ diametros poſſe etiam nobis repræſentare. Unde erit linea centro referta, ſi utique punctum V talem ſubeat poſitionem, quæ a poſitione ipſius FG minime pendeat; hoc eſt, ſi in valore ipſius AV non reperiantur indeterminatæ r, & s. Ita enim neceſſe eſt, ut omnes lineæ diametri conveniant in uno eodemque puncto V: quod proinde erit centrum ipſius lineæ. Per contrarium vero, quum poſitio puncti V pendet a poſitione ipſius FG; illud erit aliud, atque aliud, prout

alia,

alia, atque alia eſt diameter FG. Unde, quum concurſus diametrorum omnium non contingat in uno, eodemque puncto; plane oportebit, ut linea ipſa ſit prorſus centro deſtituta.

785. Sed uno, aut altero exemplo rem oſtendamus. Ac primo formula linearum ſecundi ordinis, relate ad diametrum, eſt * $ey^2 + (gx^2 + ix + k) = 0$. Scribendo autem in ea rz loco y, & $u + sz$ loco x; habebitur loco ejus hæc alia $(er^2 + gs^2)z^2 + (2gsu + is)z + (gu^2 + iu + k) = 0$. Plane vero, ut ex iſta æquatione eruatur diameter FG, fieri debet AF $= - is : (2er^2 + 2gs^2)$, AE $= er^2 + gs^2$, & DE $= - gs$. Unde fiet AV $= i : 2g$. Quum ergo in valore iſto ipſius AV non reperiantur indeterminatæ r, & s; erunt lineæ ſecundi ordinis centro refertæ: quod determinabitur, producendo BA uſque in V, ita, ut ſit AV $= i : 2g$. Et quoniam, quum habetur $g = 0$, hoc eſt, quum æquatio pertinet ad parabolam, valor ipſius AV evadit infinitus; liquet, in parabola centrum in infinitum abire.

* art. 755.

786. Secundo formula linearum tertii ordinis, relate ad diametrum, eſt * $ay^3 + (cx^2 + fx + b)y + (dx^3 + gx^2 + ix + k) = 0$. Itaque, ſi in ea ſcribatur rz loco y, & $u + sz$ loco x; habebitur loco ejus hæc alia $(ar^3 + cs^2r + ds^3)z^3 + (2crsu + 3ds^2u + frs + gs^2)z^2 + (cru^2 + 3dsu^2 + fru + 2gsu + br + is)z + (du^3 + gu^2 + iu + k) = 0$. Ut autem ex iſta æquatione eruatur diameter FG, fieri debet AF $= - (fn - gs^2) : (3ar^3 + 3cs^2r + 3ds^3)$, AE $= 3ar^3 + 3cs^2r + 3ds^3$, & DE $= - 2crs - 3ds^2$. Quare fiet AV $= (fr + gs) : (2cr + 3ds)$; & con-

* art. 755.

ſe-

ſequenter, quia in valore iſto ipſius AV adſunt indeterminatæ r, & s, dicendum eſt, lineas tertii ordinis, prout exhibentur ab æquatione generali $ay^3 + (cx^2 + fx + b)y + (dx^3 + gx^2 + ix + k) = 0$, non eſſe centro refertas.

787. In tribus interim caſibus ſpecialibus lineæ tertii ordinis ſuum centrum habebunt. Primus eſt, quum habetur, tum $f = 0$, cum $g = 0$; hoc eſt, quum earum æquatio, relate ad diametrum, eſt $ay^3 + (cx^2 + b)y + (dx^3 + ix + k) = 0$. Tunc enim reperietur AV = 0; adeoque, coeuntibus ſimul punctis V, & A, fiet A centrum ipſarum linearum. Alter caſus eſt, quum habetur, tam $c = 0$, quam $d = 0$; hoc eſt, quum earum æquatio relate ad diametrum, eſt $ay^3 + (fx + b)y + (gx^2 + ix + k) = 0$. Nam in hoc alio caſu fiet AV infinitæ longitudinis; atque adeo, abeunte in infinitum puncto V, lineæ ipſæ in infinita diſtantia ſuum centrum habebunt. Ac denique tertius caſus eſt, quum omnes c, d, f, g fiunt nihilo æquales; hoc eſt, quum earum æquatio, relate ad diametrum, eſt $ay^3 + by + (ix + k) = 0$. Ubi enim id accidit, fiet AV = 0 : 0, hoc eſt indeterminatæ longitudinis; & conſequenter quodlibet punctum ipſius AB velut centrum haberi debet.

788. Et quidem, quum æquatio linearum tertii ordinis eſt $ay^3 + by + (ix + k) = 0$; tunc evenit id, quod alibi * notavimus; hoc eſt, ut earum diametri omnes coeant in unum. Unde, ſi centrum ſit concurſus diametrorum omnium, plane neceſſe eſt, ut quodlibet punctum ipſius AB, velut centrum, debeat haberi. Quotieſcumque vero æquatio earundem linearum *art. 750.

eſt

eſt $ay^3+(fx+b)y+(gx^2+ix+k)=o$ tunc ipſarum diametri omnes parallelæ fiunt inter ſe. Quare, quum concurſus diametrorum fiat in infinita diſtantia, ipſum pariter centrum in infinitum abibit. Sed, omiſſis duobus hiſce caſibus valde ſpecialibus, placet, paulo accuratius priorem proſequi, ut tanto melius centri naturam, ac indolem in ſingulis linearum ordinibus dignoſcere valeamus.

789. Nimirum, quum linearum tertii ordinis æquatio eſt $ay^3+(cx^2+b)y+(dx^3+ix+k)=o$, diametri omnes conveniunt in puncto A, quod proinde fit centrum ipſarum linearum. Quum autem in puncto A ſit $x=o$, erit eodem in loco æquatio linearum $ay^3+by+k=o$: quæ quum ſit adhuc tertii gradus, & ſecundo termino careat; plane oportebit, ut ipſa AC, ad ſingula lineæ crura terminata, dividatur a puncto A in tria ſegmenta, & duo illa, quæ exiſtunt ad unam partem, adæquent ſegmentum tertium, quod ad partem alteram jacet. Idem verò contingat neceſſe eſt, relate ad quamvis aliam rectam Ab, quæ determinat poſitionem ordinatarum cujuſvis alterius diametri AH. Nam in ordine ad eam ſub puncto A æquatiò fiet $(ar^3+cs^2r+ds^3)z^3+(br+is)z+k)=o$, quæ ſimiliter eſt tertii gradus, & adhuc ſecundo termino caret.

790. Id vero quum ita ſit, liquet, quod, ſicuti in lineis ſecundi ordinis omnes rectæ, per centrum ductæ, & utrinque ad lineas terminatæ, biſariam in ipſo centro dividuntur; ita in lineis tertii ordinis, centro refertis, omnes rectæ, quæ per illud ducuntur, & ad ſingula lineæ

nearum crura terminantur, adeo quidem in tria ſegmenta a centro ipſo dividuntur, ut duo cujuſque ſegmenta, ad unam centri partem exiſtentia, adæquent ſimul ſegmentum tertium, quod ad partem alterem jacet. Quumque proprietas iſta centri ad lineas ordinum ſuperiorum pro ea, quam ordo exigit, ratione pariter extendatur; licebit, centri definitionem, pro ſingulis linearum ordinibus, independenter a diametris, hunc etiam in modum concipere.

791. Nimirum in qualibet linea vocari poterit centrum punctum illud, ſi quod extat, per quod omnes rectæ, quæ ducuntur, & lineæ occurrunt in totidem punctis, quot exponens ſui ordinis indicat, ita quidem ab ipſo centro ſecantur, ut ſumma ſegmentorum ex uno centri latere adæquet ſummam ſegmentorum ex latere alio. Atque hac ratione, ad inſtar diametrorum, poterunt ipſa centra in varia genera diſpeſci: vocando nempe centrum primi generis, quod lineis ſecundi ordinis competit; centrum ſecundi generis, quod ad lineas refertur ordinis tertii; centrum tertii generis, quod proprium eſt linearum ordinis quarti; atque ita deinceps. Nam, ſicuti alius, atque alius eſt ordo linearum; ita notio illa generalis centri aliam, atque aliam induit formam.

792. Illud interim non eſt hoc loco reticendum, fieri interdum poſſe, ut in linea aliqua centrum abeat in illud, quod eſt ordinis proxime inferioris. Ita, jam vidimus ſupra *, lineas tertii *ar. 787. ordinis eſſe centro refertas, ubi earum æquatio, relate ad diametrum, eſt $ay^3 + (cx^2 + b)y + (dx^3 + ix + k) = 0$. Plane vero, ſicuti centrum

 iſtud

FIG. 80. iſtud eſt punctum A, ita idem ſecundi generis deprehenditur, hoc eſt ejus naturæ, qualem ordo exigit linearum. Verum ſi ponatur $k = o$ tunc ſtatim fiet generis primi. Nam, exiſtente $k = o$, æquatio ſub puncto A evadit $ay^3 + by = o$, ſive $ay^2 + b = o$: quæ caret quidem ſecundo termino, ſed ad duas dimenſiones attollitur. Neque aliter oritur æquatio ſub eodem puncto A, relate ad quamvis aliam rectam Ab, quæ determinat poſitionem ordinatarum cujuſvis alterius diametri AH; quum fiat $(ar^3 + cs^2r + ds^3)z^3 + (br + is)z = o$, hoc eſt $(ar^3 + cs^2r + ds^3)z^2 + (br + is) = o$.

793. Patet autem, id ex eo oriri, quia in iſto caſu centrum in perimetro ipſius lineæ locatur; adeoque evaneſcit unum ſegmentorum, in quæ ab ipſo centro quælibet recta dividitur. Hinc, ſi contingat, ut evaneſcant eodem tempore duo ex iis ſegmentis; tunc ad genus, duplici gradu inferius, centrum deprimetur. Et generaliter quot ſegmenta, evenit, ut ſimul evaneſcant; tot gradibus ex eo genere, quod eſt proprium lineæ, ad genus aliud inferius centrum revocabitur. Fieri autem poſſe, ut plura interdum ſegmenta evaneſcant, liquet abunde. Neque enim quicquam obſtat, quominus in æquatione centrali, hoc eſt, quæ communis ſit omnibus rectis, per centrum ductis, plures ex terminis ultimis in nihilum abeant.

794. Fieri etiam poteſt, ut centrum, quo prædita eſt linea, tale deprehendatur, ut idem ſit numerus ſegmentorum ex utroque latere centri, & ut ſingula ſingulis ſint æqualia. Evenit id, quum in æquatione centrali, una cum

ſe-

ſecundo termino, deficiunt quoque omnes alii termini, qui in locis paribus exiſtunt. Nam, quotieſcumque æquatio centralis eſt hujus formæ, ea aſcendet ſemper ad dimenſiones, numero pares; & non ſolum tot dabuntur in ipſa radices poſitivæ, quot negativæ, ſed ſingulæ ſingulis æquales pariter erunt; quum talis ſit natura æquationum, in quibus deſunt termini omnes, in locis paribus exiſtentes: quemadmodum ex generali æquationes conſtituendi ratione colligere licet.

795. Cæterum, ſicuti centri notionem a diametrorum contemplatione ſejunximus *; ita, pro ſingulis linearum ordinibus, licebit, centrum determinare, independenter etiam a diametris. Hunc in finem, exiſtentibus AB linea abſciſſarum, & AC linea ordinatarum, ſit F centrum lineæ, de qua agitur. Jamque, ſi per punctum F ducatur, tum recta FG, ipſi AB parellela, cum recta Fb, utcumque inclinata ad aliam AC; oportebit *, in æquatione ſcribere $rz + p$ loco y, & $u + sz + q$ loco x, quo fiat FG linea abſciſſarum, & Fb linea ordinatarum. Quum autem in puncto F ſit $u = o$; habebitur æquatio centralis, ſcribendo dumtaxat $rz + p$ loco y, & $sz + q$ loco y. Unde, faciendo demum, ut in æquatione iſta centrali evaneſcat ſecundus terminus, nota fiet poſitio ipſius centri F.

* ar. 791.

FIG. 81.

* art. 718.

796. Ita in formula linearum ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + by + ix + k = o$, ſcribendo $rz + p$ loco y, & $sz + q$ loco x; fiet $(2ep + fq + b)r + (2gq + fp + i)s$ coefficiens ſecundi termini novæ æquationis. Quare, faciendo $2ep + fq + b = o$, & $2gq + fp + i = o$;

 in-

invenietur AK $= q = (2ei - fh) : (f^2 - 4eg)$, & AL $= p = (2gh - fi) : (f^2 - 4eg)$. Similiter in formula linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, ſcribendo $rz + p$ loco y, & $sz + q$ loco x, fiet $(3ap + bq + e)r^2 + (2bp + 2cq + f)rs + (3dq + cp + g)s^2$ coefficiens ſecundi termini novæ æquationis. Quare, faciendo $3ap + bq + e = 0$, $2bp + 2cq + f = 0$, & $3dq + cp + g = 0$; invenietur, per priores duas æquationes, AK $= q = (2be - 3af) : (6ac - 2b^2)$, & AL $= p = (bf - 2ce) : (6ac - 2b^2)$; per duas vero poſteriores AK $= q = (cf - 2bg) : (6bd - 2c^2)$, & AL $= p = (2cg - 3df) : (6bd - 2c^2)$: proindeque, niſi fuerit $(2be - 3af) : (6ac - b^2) = (cf - 2bg) : (6bd - 2c^2)$, & $(bf - 2ce) : (6ac - 2b^2) = (2cg - 3df) : (6bd - 2c^2)$, non poterunt lineæ tertii ordinis centrum habere.

CAPUT IV.

Linearum cujuſque ordinis ſecantes, tangentes, & aſymptoti.

797. Egimus præcedenti capite de diametris, axibus, & centris linearum cujuſcumque ordinis; nunc de earundem ſecantibus, tangentibus, & aſymptotis agendum nobis erit. Ratio autem poſtulat, ut primo loco de ſecantibus differamus. Nam, ſicuti ſecans tangens evadit, quum duo puncta ſectionis coeunt in unum; ita tangens fiet aſymptotus, quum, puncto contactus in infinitum abeunte, alicubi tangens

gens ipſa reperitur: qua ratione tangentes quidem ex ſecantibus, aſymptotos autem ex tangentibus eruere licebit.

798. Vulgares Geometræ, quibus non aliæ curvæ ſunt cognitæ, ac exploratæ, quam quæ lineas ſecundi ordinis conſtituunt, inter tangentem, & ſecantem illud diſcriminis agnoſcunt, quod tangens tota cadit extra curvam, ſecans aliquem curvæ arcum intercipit. Verum hujuſmodi notiones non ſunt ſatis accuratæ, aut ſaltem cum lineis altiorum ordinum non rite conveniunt. Nam in aliis hiſce lineis poteſt quidem recta aliqua tangere curvam, nec tamen quidpiam vetat, quominus aliquem curvæ arcum ſimul intercipiat.

799. Itaque, ut diſcrimen inter tangentem, & ſecantem perſpectum nobis evadat, conſiderare oportet lineas omnes, velut ortas ex motu punctorum. Et, quemadmodum tangens, & ſecans hoc quidem commune habent, quod utraque occurrit curvæ, relate ad quam tangens, & ſecans appellantur; ita non aliud erit diſcriminis inter tangentem, & ſecantem, quam quod in loco occurſus punctum, deſcribens rectam, & punctum, deſcribens curvam, feruntur eadem directione, quum recta eſt tangens, & directionibus diverſis, quum recta eſt ſecans.

I. *De numero punctorum, in quibus lineæ ordinum omnium a recta ſecari poſſunt.*

800. CUjuſcumque ordinis ſit linea, ea in tot punctis ab alia recta ſecari poteſt, quot exponens ſui ordinis indicat; adeo,

ut, ſicuti, quum eſt primi ordinis, hoc eſt, quum ipſa etiam eſt recta, in unico puncto ſecatur; ita ſecari poterit in duobus punctis, quum eſt ordinis ſecundi; in tribus punctis, quum eſt ordinis tertii; in quatuor punctis, quum eſt ordinis quarti; atque ita deinceps: qua ratione diſtingui poterunt lineæ in ordines, non
*art. 40. modo ſecundum numerum *dimenſionum, ad quas earum æquationes aſcendunt; verum etiam ſecundum numerum punctorum, in quibus a recta ſecari queunt.

801. Neque vero difficile erit, oſtendere generale iſtud theorema, quod linea quævis in tot punctis ab alia recta ſecari poteſt, quot exponens ſui ordinis indicat. Faciendo enim, ut rectæ ſecantis, & lineæ ſectæ eadem ſit, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum; jam eædem incognitæ in utriuſque æquatione continebuntur. Quare ex iis erui poterit æquatio tertia, quæ unicam dumtaxat incognitam comprehendat. Hæc autem quum oſtendat radicibus ſuis loca interſectionum, & aſcendat ſemper ad tot dimenſiones, quot deſignat exponens ordinis lineæ ſectæ; plane neceſſe, ut in totidem quoque punctis fieri poſſit earum linearum interſectio.

802. Ut quoniam æquatio linearum ſecundi ordinis eſt * $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, & æquatio ad rectam ſubit ſemper formam
*art. 612. iſtam $y = mx + n$; ſcribendo in ea $mx + n$ loco y, & $m^2x^2 + 2mnx + n^2$ loco y^2; habebitur loco ejus hæc alia $(em^2 + fm + g)x^2 + (2emn + fn + hm + i)x + (en^2 + hn + k) = 0$: quæ, quum ad duas dimenſiones aſcendat, argumento

to nobis eſſe debet, lineas ſecundi ordinis in duobus punctis a recta ſecari poſſe. Pariterque, ſi in formula linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ ſcribatur ubique $mx + n$ loco y; orietur hæc alia $(am^3 + bm^2 + cm + d)x^3 + (3am^2n + 2bmn + cn + em^2 + fm + g)x^2 + (3amn^2 + bn^2 + 2emn + fn + hm + i)x + (an^3 + en^2 + hn + k) = 0$: quæ, quum ad tertium gradum attollatur, indicat nobis, tria eſſe puncta, in quibus lineæ tertii ordinis a recta ſecari queunt.

803. Et quidem, quod, ſcribendo in formula linearum cujuſque ordinis $mx + n$ loco y, alia oritur, quæ, continens ſolam incognitam x, nequit altius attolli, quam ordinis indicat exponens; id liquet generaliter ex eo, quod dimenſiones ipſius y, quæ ubique tolluntur, ſupplentur rurſus per alias totidem alterius incognitæ x. Quod autem hæc eadem æquatio oſtendit radicibus ſuis loca interſectionum; nec etiam arduum erit intelligere. Nam, ſi quælibet earum radicum ſubſtituatur loco x in æquatione ad rectam $y = mx + n$; habebitur pro incognita altera y valor, qui per conſimilem ſubſtitutionem etiam ex æquatione lineæ, de qua agitur, erui poterit. Quare, ſumptis ſuper linea abſciſſarum iis radicibus, ordinatæ, eis correſpondentes in recta, erunt etiam lineæ ipſius ordinatæ: & propterea, quum termini earum ordinatarum pertineant, tum ad rectam, cum ad lineam; ii erunt loca interſectionum.

804. Dubitari autem poteſt, num, præter iſta loca, alia adſint, in quibus lineæ, & rectæ interſectio pariter fieri poſſit. Hunc in finem

meminiſſe oportet, omnia problemata non plures caſus habere poſſe, quam eorum æquationes
Art. 643. generales indicant radicibus ſuis. Itaque proble-
lib. 2. ma de invenienda interſectione rectæ, & lineæ alicujus tot etiam, & non plures, caſus admittet, quot adſunt radices in æquatione, quæ pro definienda ea interſectione generatim reperitur. Plane vero hujuſmodi æquatio habetur, ſcribendo in æquatione ipſius lineæ $mx + n$ loco y; quandoquidem, faciendo, ut rectæ ſecantis, & lineæ ſectæ eadem ſit, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum, æquatio ipſius rectæ induit generatim formam iſtam $y = mx + n$. Unde, præter loca interſectionum, quæ radicibus ſuis ea indicat æquatio, alia dari non poterunt.

805. Neque vero neceſſe eſt, ut omnis recta revera ſecet lineam alicujus ordinis in tot punctis, quot indicat ipſe ejus ordinis exponens. Etſi enim, ſcribendo in æquatione lineæ $mx + n$ loco y, alia ſemper oriatur, ad tot dimenſiones aſcendens, quot ſunt unitates in eo exponente; fieri tamen poteſt, ut, pro diverſitate valorum, quos m, & n poſſunt habere, nonnullæ ex ejus radicibus evadant interdum imaginariæ. Quare, pro numero radicum imaginariarum, quæ in ea occurrunt æquatione, omnino neceſſe eſt, ut totidem puncta interſectionum pariter deficiant, nec ullibi reperiantur: intantum, ut, ſi omnes radices ſint imaginariæ, omnia etiam interſectionum puncta deficere debeant.

806. Quum autem radices imaginariæ binatim ſemper in æquationibus occurrant; liquet, numerum interſectionum deficientium parem

ſem-

ſemper eſſe oportere. Vnde, ſicuti unica illa interſectio, quæ locum habet in lineis primi ordinis, numquam deficere poteſt; ita ex duabus interſectionibus, quæ obtinent in lineis ordinis ſecundi, deficiente una, neceſſe eſt, ut altera quoque deficiat. Eadem autem ratione in lineis tertii ordinis interſectiones erunt, vel una, vel tres: quemadmodum erunt, vel duæ, vel quatuor in lineis ordinis quarti; vel una, vel tres, vel quinque in lineis ordinis quinti; atque ita deinceps.

807. Illud interim hoc loco occurrit, notatu dignum, quod, ſcribendo in æquatione lineæ $mx + n$ loco y, evaneſcere interdum poteſt in nova æquatione, non modo aliquis ex terminis intermediis, verum etiam quidam ex terminis extremis, hoc eſt, vel ultimus, vel primus. Quum id contingit, æquatio nova uno quidem gradu deprimitur. Verum non ideo putandum eſt, defectu unius radicis, unam pariter interſectionum deficere; quia, ut dictum eſt *, numerus interſectionum deficientium par ſemper eſſe debet; ſed cogitare debemus, interſectionem unam in eo caſu definiri per abſciſſam, quæ ſit, vel nullius, vel infinitæ longitudinis. * Ar. 806

808. Et quidem, quod, evaneſcente ultimo termino, una ex interſectionibus definiri debet per abſciſſam, quæ ſit nullius longitudinis; id nullam habet difficultatem. Finge enim, lineas eſſe ſecundi ordinis. Jamque æquatio, loca interſectionum generatim definiens, erit ſemper hujus formæ $ax^2 + bx + c = 0$. Plane vero, quum habetur $c = 0$, illa eadem æquatio evadit $ax^2 + bx = 0$: unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = -b : a$

$-b:a$. Quod autem, evaneſcente primo termino, una interſectionum definienda eſt per abſciſſam infinitæ longitudinis; id non ita liquido conſtat. Nam, ubi ponitur $a=0$, æquatio illa mutatur in hanc aliam $bx+c=0$: ex qua non aliud inferri poſſe videtur, quam $x=-c:b$.

809. Conſtabit id vero, & quidem abunde, ſi utique in æquatione $ax^2+bx+c=0$ ſcribatur $1:y$ loco x, & $1:y^2$ loco x^2. Hac enim ratione, loco ejus æquationis, habebitur hæc alia $a:y^2+b:y+c=0$, ſive etiam $cy^2+by+a=0$: quæ, ſicuti evadit $cy^2+by=0$, quum ponitur $a=0$; ita dabit in eadem hypotheſi, tum $y=0$, cum $y=-b:c$. Quum autem ſit $x=1:y$, ſive $y=1:x$; erit quoque tam $1:x=0$, quam $1:x=-b:c$. Et profecto, quemadmodum ex poſtrema iſta æquatione eruitur $x=-c:b$, ita ex priore illa infertur $x=1:0$.

810. Obiter autem notetur hoc loco velim, quod, ſicuti una ex radicibus æquationis evadit infinita, quum primus ejus terminus evaneſcit; ita, ſi contingat, duos ex prioribus ejus terminis evaneſcere, tunc duæ item radices fient infinitæ; & generaliter, quot in æquatione evaneſcunt ex terminis primis, totidem in ea radices fieri debent infinitæ. Jam enim cubicæ æquationis $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tres radices ſunt $x=0$, $x=0$, $x=-b:a$, quum ponitur tam $c=0$, quam $d=0$. Quare omnino neceſſe eſt, ut tres ejus radices ſint $x=1:0$, $x=1:0$, $x=-d:c$, ubi a, & b nihilo æquales ſupponuntur.

811. Quæ quum ita ſint, haud difficile modo

do erit, intelligere, unde fiat, ut lineæ, præter diametros, quæ ſunt ſui ordinis propriæ, admittant quandoque * diametros alias, quæ ad ordines pertineant inferiores. Jam enim rectarum æquidiſtantium, quæ in lineis ducuntur, fieri quandoque poteſt, talem eſſe poſitionem, ut una, aut plures ex interſectionibus earum cum lineis ipſis abeant in infinitum. Unde, ſi, iis neglectis, ratio haberi velit earum dumtaxat interſectionum, quæ contingunt in finita diſtantia: plane numerus interſectionum minor erit, quam qui ab exponente ordinis ipſarum linearum deſignatur: & propterea recta, quæ eas parallelas ſubinde ſecat, ut ſumma ſegmentorum ex uno ſecantis latere æqualis ſit ſummæ ſegmentorum ex latere alio; omnino oportebit, ut ſit diameter generis alicujus inferioris. * Art. 759.

II. *Proprietas ſecantium, pro ſingulis linearum ordinibus demonſtrata.*

812. VIdimus *, lineam cujuſque ordinis in tot punctis a recta ſecari, quot indicat exponens ipſius ordinis; nunc accidens præcipuum ipſarum ſecantium oſtendemus, quod ſub generali hoc theoremate complectemur: nimirum, quod, ſi linea alicujus ordinis a duabus rectis ſecetur, quæ ſibi mutuo occurrant, & aliis duabus poſitione datis ſint parallelæ, capianturque cujuſque ſegmenta a punctis ſectionum ad punctum occurſus; ratio, quam habet productum ſegmentorum unius ad productum ſegmentorum alterius ſemper eſt data. * Art. 800.

813.

FIG. 75. 813. Sunto igitur AB, AC binæ rectæ poſitione datæ, quarum prior AB capiatur velut linea abſciſſarum, altera AC velut linea ordinatarum. Jamque, ſi linea ſit ſecundi ordinis, æquatio ejus induet ſemper * hanc formam $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Ducantur ipſis AB, AC binæ rectæ parallelæ, quarum utraque ſecet in duobus punctis lineam, de qua agitur, eædemque ſibi invicem occurrant. Dico, quod, ſi capiantur cujuſque ſegmenta a punctis ſectionum ad punctum occurſus, rectangulum ſub ſegmentis primæ eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis ſecundæ, ut eſt coefficiens e maximæ poteſtatis ordinatæ ad coefficientem g maximæ poteſtatis abſciſſæ.

* art. 612.

814. Ponamus primo, ſecantes, de quibus agitur, eo uſque contiguas eſſe ipſis AB, AC, ut plane coincidant cum iis; ſintque F, & G puncta ſectionum prioris AB, nec non K, & L puncta ſectionum alterius AC. Et quoniam, tum in F, cum in G fit $y = 0$; erunt radices duæ hujus æquationis $gx^2 + ix + k = 0$ valores ſegmentorum AF, AG: proindeque erit * rectangulum FAG $= k : g$. Pariterque, quia in puncto A fit $x = 0$; erunt radices duæ alterius hujus æquationis $ey^2 + hy + k = 0$ valores ſegmentorum AK, AL: proindeque erit rectangulum KAL $= k : e$. Jam vero $k : g$ eſt ad $k : e$, ut e ad g. Quare etiam rectangulum FAG erit ad rectangulum KAL, ut eſt e ad g.

* art. 440. lib. 2.

815. Ponamus ſecundo, priorem ex ſecantibus coincidere cum ipſa AB, aliam vero eſſe ipſi AC revera parallelam. Jamque, ſi in æquatione $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ ſcribatur

$x + q$

$u + q$ loco x, fieri poteſt, transformatione iſta, ut, manente eadem linea abſciſſarum AB, evadat parallela illa * linea ordinatarum. Quare, adhibita prioris caſus * demonſtratione, rectangulum ex ſegmentis primæ erit ad rectangulum ex ſegmentis ſecundæ, ut eſt in nova æquatione coefficiens maximæ poteſtatis ordinatæ ad coefficientem maximæ poteſtatis abſciſſæ. Sed, per eam transformationem, maximæ incognitarum poteſtates non ſubeunt * novos coefficientes. Itaque rectangulum ex ſegmentis primæ ad rectangulum ex ſegmentis ſecundæ adhuc erit, ut coefficiens e ad coefficientem g. *art.690. *art.814. *art.700.

816. Ponamus tertio, priorem ex ſecantibus eſſe reverà parallelam ipſi AB, alteram vero coincidere cum ipſa AC. Et, ſiquidem in æquatione $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ ſcribatur $z + p$ loco y; fieri poteſt, transformatione iſta, ut, manente eadem linea ordinatarum AC, evadat parallela illa * linea abſciſſarum: proindeque, adhibita adhuc prioris caſus * demonſtratione, rectangulum ſub ſegmentis primæ erit ad ad rectangulum ſub ſegmentis ſecundæ, ut eſt in nova æquatione coefficiens maximæ poteſtatis ordinatæ ad coefficientem maximæ poteſtatis abſciſſæ. Jam vero, per illiuſmodi transformationem, maximæ incognitarum poteſtates iiſdem coefficientibus oriuntur * affectæ. Quare rectangulum ex ſegmentis primæ ad rectangulum ex ſegmentis ſecundæ rurſus erit, ut e ad g. *art.663. *art.814. *art.673.

817. Ponamus denique, neutram ex ſecantibus coincidere cum ea, cui eſſe debet parallela. Scribatur in æquatione $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, tum $z + p$ loco y, cum $u + q$

lo-

loco x. Jamque, transformatione iſta, fieri po-
*art.719. teſt *, ut ſecans, ipſi AB parallela, evadat. linea
abſciſſarum; & ſecans, alteri AC æquidiſtans,
ſubeat vices lineæ ordinatarum. Quare, adhibi-
*ar. 814. ta ſemper demonſtratione prioris * caſus, rectan-
gulum ex ſegmentis primæ erit ad rectangulum
ex ſegmentis ſecundæ, ut eſt in nova æquatione
coefficiens maximæ poteſtatis ordinatæ ad coef-
ficientem maximæ poteſtatis abſciſſæ. Sed ma-
ximæ incognitarum poteſtates nec etiam per
*art.723. transformationem iſtam novos ſubeunt * coeffi-
cientes. Itaque rectangulum ex ſegmentis pri-
mæ ad rectangulum ex ſegmentis ſecundæ etiam
erit, ut e ad g.

818. Ex ipſa autem theorematis demonſtra-
tione patet, cur idem non obtineat, quum duæ
ſecantes ipſis AB, AC non ſunt parallelæ, ſed
utcumque ad eas inclinantur: nimirum, quia,
transformando ſubinde æquationem, ut earum
ſecantium prior evadat linea abſciſſarum, & ſe-
cunda linea ordinatarum, maximæ incognita-
*art.726. rum poteſtates novos ſubeunt * coefficientes;
adeoque rectangula, quæ ſub earum ſecantium
ſegmentis continentur, minime eſſe poſſunt in-
ter ſe in ea ratione, quam habet e ad g. Interim,
data poſitione earum ſecantium, relate ad ipſas
AB, AC, haud difficile erit, definire rationem,
quam rectangula ex ſegmentis ipſarum ſervare
debent inter ſe.

819. Ducantur enim per punctum A rectæ
AH, Ab, ſecantibus iis parallelæ. Jamque, ſi
fieri debeat, ut in æquatione $ey^2 + fxy + gx^2$
$+ by + ix + k = 0$ evadat AH linea abſciſſarum,
*art.721. & Ab linea ordinatarum, ſcribendum erit * mz +
msz

msz loco x, & $rz + nsz + nu$ loco y. Plane vero, transformatione iſta, fit $(en^2 + fmn + gm^2)s^2 + (2en + fm)rs + er^2$ coefficiens ipſius z^2, & $en^2 + fmn + gm^2$ coefficiens ipſius u^2. Quare in horum coefficientium ratione erunt rectangula, quæ ſub earum ſecantium ſegmentis continentur: & propterea, ſicuti, data poſitione rectarum AH, Ab, dati ſunt ii coefficientes; ſic pariter ex poſitione ſecantium, relate ad ipſas AB, AC, eruere licebit rationem rectangulorum, quæ fiunt ex ſegmentis ipſarum.

820. Fieri autem poteſt, ut una ex ſecantibus maneat parallela ipſi AB, tantumque alia inclinetur ad ipſam AC. In iſto caſu, coeuntibus rectis AH, AB, erit $n = 0$, & $m = 1$. Unde, quum fiat etiam $(en^2 + fmn + gm^2)s^2 + (2en + fm)rs + er^2 = gs^2 + frs + er^2$, & $en^2 + fmn + gm^2 = g$; erit rectangulum ſub ſegmentis primæ ad rectangulum ſub ſegmentis ſecundæ, ut eſt $gs^2 + frs + er^2$ ad g. Quin etiam fieri poteſt, ut prior quidem ſecans inclinetur ad ipſam AB, altera vero maneat parallela ipſi AC. Et quoniam in hoc alio caſu, coeuntibus rectis Ab, AC, fit $s = 0$, & $r = 1$; erit $(en^2 + fmn + gm^2)s^2 + (2en + fm)rs + er^2 = e$: proindeque rectangulum ex ſegmentis primæ ad rectangulum ex ſegmentis ſecundæ erit, ut e ad $en^2 + fmn + gm^2$.

821. Quam modo propoſiti theorematis demonſtrationem attulimus, pro lineis ſecundi ordinis, facile erit, ad lineas ſuperiorum ordinum extendere. Sint enim rurſus AB, AC rectæ, poſitione datæ, quibus binæ ſecantes debent eſſe parallelæ, & capiatur quoque prior earum AB velut linea abſciſſarum, & altera AC velut linea

æqua-

ordinatarum. Jamque, ſi linea ſit tertii ordi
*Art.612. æquatio ejus erit ſemper * hujus formæ ay^3 $bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by$ $ix + k = o$. Quare, ratione non diſſimili, ſolidum ſub ſegmentis primæ ad ſolidum ſegmentis ſecundæ, ut eſt coefficiens maxi poteſtatis ordinatæ a ad coefficientem maxi poteſtatis abſciſſæ d.

822. Plane vero, quum binæ ſecantes ſunt ipſis AB, AC parallelæ, tunc ratio ſolido rum, quæ fiunt ex ſegmentis ipſarum, mini æqualis eſt ei, quam habet a ad d. Sed, data po ſitione earum ſecantium, ſive ſuarum paralle rum AH, Ab, relate ad ipſas AB, AC, faci erit, rationem illam definire. Nam, ſcribend in æquatione $mu + msz$ loco x, & $rz + nsz +$
*Art.721. loco y, fieri poteſt * transformatione iſta, evadat AH linea abſciſſarum, & Ab linea or natarum. Unde, ſicuti in nova æquatione $(an^3 + bmn^2 + cm^2n + dm^3)s^3 + (3an^2 + 2bm$ $+ cm^2)rs^2 + (3an + bm)r^2s + ar^3$ coefficie ipſius z^3, & $an^3 + bmn^2 + cm^2n + dm^3$ coeffi ciens ipſius u^3; ita ſolida illa erunt in ratio horum coefficientium.

823. Quod, ſi prior ſecans maneat paralle la ipſi AB, tantumque alia ad ipſam AC incli netur; tunc, coeuntibus rectis AH, AB, erit $n = o$, & $m = 1$. Unde, quum fiat etiam $(an^3$ $+ bmn^2 + cm^2n + dm^3)s^3 + (3an^2 + 2bmn +$ $cm^2)rs^2 + (3an + bm)r^2s + ar^3 = ds^3 + crs^2$ $+ br^2s + ar^3$, & $an^3 + bmn^2 + cm^2n + dm^3$ $= d$; erit ſolidum ex ſegmentis primæ ad ſoli dum ex ſegmentis ſecundæ, ut eſt $ds^3 + crs^2 +$ $br^2s + ar^3$ ad d. Atque ita quoque, ſi prior ſe

cans

ſans inclinetur ad ipſam AB, & alia maneat parallela ipſi AC; tunc, coeuntibus rectis Ab,AC, fiet $s = o$, & $r = 1$: qua ratione ſolidum ſub ſegmentis primæ ad ſolidum ſub ſegmentis ſecundæ erit, ut a ad $an^3 + bmn^2 + cm^2n + dm^3$.

III. *Proprietas diametrorum, relate ad ſuas ordinatas, earumque latera recta, ac tranſverſa.*

824. EX generali ſecantium theoremate, quod pro lineis ordinum omnium modo*oſtenſum exhibuimus, haud difficile erit, eruere, quid accidat diametris, relate ad ſuas ordinatas; & ſuperfluum videri poteſt, ſpecialem de hoc argumento ſermonem inſtituere. Interim ad rem fore putamus, proprietatem diametrorum, reſpectu ſuarum ordinatarum, ſeorſim hoc loco proſequi; tum, quia diametri, pro ſingulari illa * ratione, qua dividunt rectas æquidiſtantes, ſuper quibus ordinatæ capiuntur, ſingularem quoque conſiderationem merentur; tum etiam, quia hinc dabitur nobis occaſio determinandi, tum latera tranſverſa, cum parametros, ſeu latera recta ipſarum diametrorum.

*Art. 812.

*art. 749.

825. Ac primo quidem in qualibet linea vocabimus vertices diametri puncta illa, in quibus diameter ipſam lineam ſecat. Unde, quia quælibet recta in tot punctis lineam cujuſque ordinis ſecat *, quot indicat ipſius ordinis exponens; liquet, vertices diametri debere eſſe duos in lineis ſecundi ordinis, tres in lineis ordinis tertii, quatuor in lineis ordinis quarti, atque ita deinceps. Neque vero neceſſe eſt, ut ſinguli vertices ſint ſemper in finita diſtantia. Nam, ſicuti

*ar. 100.

in una linearum ſecundi ordinis , ſcilicet in pa-
*art.249. rabola,unus ex verticibus diametri abit * ſemper
in infinitum ; ita in lineis altiorum ordinum da-
ri poterunt diametri, in quibus non modo unus,
ſed plures etiam ex verticibus,imo etiam omnes
in infinita diſtantia reperiantur.

826. Quum autem ſub verticibus una ſal-
tem ordinatarum evaneſcat; licebit,eos determi-
nare, ponendo in æquatione lineæ, relate ad dia-
metrum,$y=0$. Sic æquatio linearum ſecundi or-
dinis,reſpectu cujuslibet diametri,eſt $ey^2 + (gx^2$
$+ ix + k) = 0$. Quare,faciendo $y = 0$, dabunt
radices duæ hujus æquationis $gx^2 + ix + k = 0$
*art.809. binos diametri vertices : quorum alter abibit *
in infinitum , ſi utique fuerit $g = 0$. Atque ita
quoque æquatio linearum tertii ordinis , relate
ad diametrum,eſt $ay^3 + (cx^2 + fx + b)y + (dx^3$
$+ gx^2 + ix + k) = 0$. Unde, ponendo $y = 0$,
exhibebunt tres radices æquationis hujus dx^3
$+ gx^2 + ix + k = 0$ ternos diametri vertices:
quorum , ſicuti unus abit in infinitum , quum
*art.810. ponitur $d = 0$; ita abibunt in infinitum * duo,
ſi fuerit etiam $g = 0$; & omnes tres , ſi fuerit
adhuc $i = 0$.

827. Jam , ſicuti quælibet diameter tot ver-
tices debet habere , quot indicat exponens or-
dinis, ad quem linea refertur ; ita cuilibet pun-
cto diametri totidem etiam ordinatæ hinc inde
correſpondent . Unde , quum omnes iſtæ ordi-
natæ ſint ſegmenta unius ejuſdemque rectæ , al-
teri poſitione datæ æquidiſtanter ductæ , & ad
ſingula lineæ crura terminatæ : ob generale ſe-
*art.812. cantium theorema, ſuperius * oſtenſum,liquet,
in ſingulis linearum ordinibus proprietatem dia-

me-

metri, relate ad ſuas ordinatas, hanc eſſe debere, ut productum ex omnibus ordinatis, quæ uni eidemque puncto diametri correſpondent, ſit ſemper in data ratione ad productum ex omnibus portionibus diametri, quæ, ſumptæ ex ipſius verticibus, ad punctum illud terminantur.

828. Verum quidem eſt, in lineis ſecundi ordinis, loco rectanguli duarum ordinatarum, uni eidemque puncto diametri hinc inde correſpondentium, ſumpſiſſe Veteres quadratum unius ordinatæ. Id vero factum ab iis, quia binæ illæ ordinatæ inter ſe ſunt æquales; adeoque rectangulum ſub utraque tantundem valet, ac quadratum unius ordinatæ. Unde, ſi inter lineas ordinum ſuperiorum dentur etiam nonnullæ, in quibus productum ex omnibus ordinatis, quæ uni eidemque diametri puncto correſpondent, tantundem valeat, ac poteſtas homogenea cujuſque earum ordinatarum; tunc, pro lineis illis, erit poteſtas iſta cujuſque ordinatæ in data ſemper ratione ad productum ex omnibus portionibus diametri, quæ, ſumptæ ex ejus verticibus, ad ordinatam illam terminantur.

829. Capiantur modo eæ diametri portiones, quæ verticibus ſuis continentur. Et, ſicuti in lineis ſecundi ordinis una eſt hujuſmodi portio; ita eædem erunt tres in lineis ordinis tertii, ſex in lineis ordinis quarti, decem in lineis ordinis quinti, atque ita deinceps. Hæ autem portiones ſunt cujuſque diametri latera tranſverſa. Et, ſiquidem capiantur totidem aliæ rectæ, quæ ſint ad eas, ſingulæ ad ſingulas, in data illa ratione; erunt rectæ iſtæ parametri, ſeu latera recta ejuſdem diametri. Unde, ſicuti cui-

libet lateri tranſverſo ſuum latus rectum correſpondet; ita, ſi contingat duo latera tranſverſa æqualia eſſe inter ſe, etiam latera recta, iis correſpondentia, æqualia erunt.

830. Etſi autem allata proprietas generaliter competat diametro, relate ad ſuas ordinatas; ea tamen, quum unus, aut plures ex verticibus abeunt in infinitum, novam ſubit formam, captui noſtro finito magis accomodatam. Nam in iſto caſu productum ex omnibus ordinatis fit æquale producto ex portionibus diametri, ſumptis a verticibus reliquis, & poteſtate datæ cujuſdam rectæ, quæ habet pro ſuo exponente numerum verticum, qui in infinitum abierunt: in tantum, ut, ſi omnes diametri vertices abeant in infinitum, nec ulli ſint vertices reliqui; tunc productum ex omnibus ordinatis datæ cujuſdam rectæ poteſtatem homogeneam adæquabit.

831. Quod ut liquido conſtet, ponamus, lineam eſſe tertii ordinis, atque adeo ejus diametrum AB tres vertices habere, qui ſunto C, D,
FIG. 82. E. Itaque, ſi lateris tranſverſi CE ſit CF parameter, ſeu latus rectum; erit, ob generalem
*art. 827. diametri*proprietatem, ſolidum trium ordinatarum, quæ uni eidemque puncto N correſpondent, ad ſolidum ex tribus CN, DN, EN, veluti eſt CF ad CE, ſive etiam veluti eſt ſolidum ex tribus CN, DN, CF ad ſolidum ex tribus CN, DN, CE. Sed, abeunte in infinitum vertice E, duæ CN, CE ſumi poſſunt, velut æquales inter ſe. Itaque, quum fiat ſolidum ex tribus CN, DN, EN æquale ſolido ex tribus CN, DN, CE; erit etiam ſolidum trium ordinatarum æquale ſolido ex duabus CN, DN, & recta data CF.

832.

832. Capiatur deinde CG, quæ ſit media proportionalis inter ipſas CE, CF. Et quoniam CF eſt ad CE, ut CG quadratum ad CE quadratum, ſive etiam, ut ſolidum ex CN in CG quadratum ad ſolidum ex CN in CE quadratum; erit, ex æquali, ut ſolidum trium ordinatarum, uni eidemque puncto N correſpondentium, ad ſolidum ex tribus CN, DN, EN, ita ſolidum ex CN in CG quadratum ad ſolidum ex CN in CE quadratum. Jam vero, abeuntibus in infinitum verticibus D, & E, quælibet ipſarum DN, EN ſumi poteſt velut æqualis ipſi CE. Itaque, quum fiat ſolidum ex tribus CN, DN, EN, æquale ſolido ex CN in CE quadratum; erit quoque ſolidum ex iiſdem tribus ordinatis æquale ſolido ex ſola portione CN in quadratum rectæ datæ CG.

833. Denique capiatur AH, quæ ſit prima ex duabus mediis proportionalibus inter ipſas CE, CF. Et quoniam CF eſt ad CE, veluti eſt cubus ex AH ad cubum ex CE; erit, rurſus ex æquali, ut ſolidum ex tribus ordinatis, quæ uni eidemque puncto N correſpondent, ad ſolidum ex tribus CN, DN, EN, ita cubus ex AH ad cubum ex CE. Sed, in infinitum abeuntibus verticibus omnibus C, D, E, quælibet trium CN, DN, EN ſumi poteſt velut æqualis ipſi CE. Itaque, quum fiat ſolidum ex tribus CN, DN, EN æquale cubo ipſius CE; erit quoque ſolidum ex tribus iis ordinatis æquale cubo rectæ datæ AH.

834. Jam data illa recta, quæ elucet in proprietate diametri ſpeciali, quum unus, aut plures ex verticibus abeunt in infinitum, velut ip-

ſius diametri parameter, ſeu latus rectum poterit haberi. Data autem diametri æquatione, haud difficile erit, longitudinem ejus definire. Ut, ſi linea ſit tertii ordinis, ejus, relate ad diametrum AB, æquatio generalis eſſe debet $ay^3 + (cx^2 + fx + b)y + (dx^3 + gx^2 + ix + k) = 0$. Et, ſicuti tres diametri vertices C, D, E determinantur per tres radices hujus æquationis $dx^3 + gx^2 + ix + k = 0$, ita latus rectum CF ad latus tranſverſum CE erit in ea ratione, quam habet d ad a, hoc eſt coefficiens maximæ poteſtatis abſciſſæ ad coefficientem maximæ poteſtatis ordinatæ.

835. Pone nunc $d = 0$: ita, ut unus ex verticibus E abeat in infinitum. Et, quemadmodum alii duo vertices C, & D determinantur per radices duas hujus æquationis $gx^2 + ix + k = 0$; ita recta data CF fiet æqualis $g : a$. Pone etiam $g = 0$: adeo, ut abeat quoque in infinitum vertex alter D. Et, ſicuti reliquus vertex C definitur per radicem hujus æquationis $ix + k = 0$; ita recta CG erit æqualis $\sqrt{(i:a)}$. Finge demum, ut i pariter evaneſcat. Et, abeunte etiam in infinitum tertio vertice C, fiet $\sqrt[3]{(k:a)}$ data illa recta AH, cujus cubo eſt æquale ſolidum ex tribus ordinatis, quæ uni eidemque diametri puncto correſpondent.

836. Cæterum duo hic occurrunt notatu digna. Primum eſt, quod, ſicuti ex ordinatis, quæ uni eidemque diametri puncto correſpondent, plures quandoque evadunt imaginariæ; ita ex verticibus ipſius diametri poſſunt interdum plures imaginarii pariter fieri. Sed, tum his, cum illis, perinde ac ſi reales eſſent, adhi-

bi-

bitis, ſemper verum erit, quod productum ex omnibus ordinatis, quæ uni eidemque diametri puncto correſpondent, datam habet rationem ad productum ex omnibus portionibus diametri, quæ, ſumptæ a verticibus ejus, ad punctum illud terminantur. Quod ſimiliter intelligi debet de generali ſecantium theoremate, quum aliqua interſectionum puncta per radices imaginarias definiuntur.

837. Alterum eſt, quod proprietas diametrorum, relate ad ſuas ordinatas, adſcribenda eſt iis diametris, quæ ſunt ejuſdem ordinis cum ipſa linea, ad quam referuntur. Nam, ſi contingat, ut linea, præter eas diametros, alias habeat ordinis inferioris; tunc procul eſt, ut aliis hiſce diametris illa eadem proprietas poſſit convenire. Ita, ſi linea ſit tertii ordinis, & ejus æquatio ſpecialis ſit $xy^2 = ax^2 - abx + a^3$; utique linea abſciſſarum erit in ea diameter generis primi. Quamquam vero ejus duo ſint vertices, qui definiuntur per radices duas hujus æquationis $x^2 - bx + a^2 = 0$; attamen rectangulum duarum ordinatarum ad rectangulum ex duabus diametri portionibus, non eſt in data ratione, ſed in ea, quam habet a ad x.

838. Id autem mirum videri non debet. In lineis enim, quæ ſecundum ordinem excipiunt, ſit locus diametris generis alicujus inferioris, quum earum rectarum æquidiſtantium, ſuper quibus talium diametrorum ordinatæ capiuntur, una, aut plures interſectiones abeunt * in infinitum. Unde, ſi, iis neglectis, dumtaxat haberi velit ratio earum interſectionum, quæ contingunt in finita diſtantia: plane neceſſe eſt, ut ge- * ar. 813.

*art.812. nerale illud * ſecantium theorema, unde ipſa dia-
art.827. metrorum proprietas fluit, nequeat in hujuſmodi ſecantibus locum habere; quandoquidem in eo poſuimus, interſectiones pro qualibet ſecante tot eſſe debere, quot indicat exponens ordinis, ad quem linea ſecta refertur.

IV. *Theoria tangentium, & notio punctorum irregularium, & multiplicium, quæ dari poſſunt in lineis.*

839. PRoximum jam eſt, ut de tangentibus linearum cujuſque ordinis ſermonem inſtituamus. Et quidem, ſi rectæ ſecantis duo ſectionum puncta coeant in unum; tunc recta illa coincidet cum arcu evaneſcente, atque adeo in loco unionis tangens evadet. Interim, ſi ordo lineæ ſectæ interſectiones exigat plures, quam duas; reliquæ illæ manebunt in locis ſeparatis, & conſequenter eadem recta erit ſimul tangens, & ſecans. Unde recta, quæ tangit lineam in puncto aliquo, eam nullibi ſecabit, ſi fuerit ſecundi ordinis; ſecabit autem in puncto alio, ſi fuerit ordinis tertii; in aliis duobus punctis, ſi ordinis quarti; in aliis tribus punctis, ſi ordinis quinti; atque ita deinceps.

840. Quum interſectiones reliquæ ſunt plures, quam una, nihil obſtat, quominus duæ ex iis coeant ſimul in alio loco. Et tunc, manentibus, quæ ſuperſunt, adhuc in locis ſeparatis, continget recta illa lineam in duobus locis diverſis. Ex quo rurſus ſequitur, rectam, quæ contingit lineam in duobus punctis, eam nullibi ſecare, ſi fuerit ordinis quarti; ſecare autem

in alio puncto, ſi fuerit ordinis quinti; in aliis duobus punctis, ſi ordinis ſexti; in aliis tribus punctis, ſi ordinis ſeptimi; atq; ita in infinitum.

841. Eadem autem ratione, quum linea excedit quintum ordinem, fieri poteſt, ut tangatur a recta in tribus locis diverſis. Et eo in caſu nullibi ſecabitur, ſi fuerit ordinis ſexti; ſed ſecabitur in alio puncto, ſi fuerit ordinis ſeptimi; in aliis duobus punctis, ſi ordinis octavi; in aliis tribus punctis, ſi ordinis noni; atque ita deinceps. Quum vero hæc theoria in infinitum extendatur, ſtatui poteſt generaliter, contactus diverſos, pro cujuſque ordinis linea, totuplices dari poſſe, ut numerus eorum duplicatus exponentem ordinis non excedat; ubi autem ab eo deficit, defectus indicabit numerum ſectionum, quæ cum contactibus iis copulantur.

842. Poſuimus huc uſque, in tota hac tangentium theoria, duas ſemper ſectiones coire in unum. An non autem fieri poteſt, ut ſimul colligantur ſectiones plures, quam duæ? Sane in curſu linearum regulari id omnino fieri nequit. Puncta enim, quæ, motibus ſuis, lineas deſcribunt, ſicuti feruntur ſemper eadem directione, quum generant lineas rectas, ſeu primi ordinis; ita regulariter directiones ſuas mutant indeſinenter, eaſque per angulos, omni angulo finito minores, ubi lineas curvas, ſeu altiorum ordinum producunt. Unde, quum duo arcus naſcentes, qui ſeſe invicem excipiunt, inclinentur ſemper ad ſe mutuo; ii cum una eademque recta coincidere nequeunt, nec proinde tria ſectionum puncta poterunt ſimul coire.

843. Interim, ſi contingat, alicubi irregu-

larem eſſe lineæ curſum: ita nempe, ut punctum lineam deſcribens, vel non mutet directionem ſuam, vel ab ea deflectat per angulum, omnium maximum, hoc eſt, qui duos rectos adæquat; tunc arcus duo naſcentes, qui ſe invicem excipiunt, locabuntur in loco illo ſuper eadem recta, atque adeo poterunt ibidem tres ſectiones coire in unum. Et ſimili ratione poterunt ſimul in loco aliquo colligi ſectiones plures, quam tres, ſi eo in loco curſus lineæ uſque adeo irregularis perſeveret, ut plures, quam duo, arcus evaneſcentes, ſibi invicem contigui, ſuper ea recta locentur.

844. Jam loca iſta linearum, in quibus duo, aut plures arcus evaneſcentes ſuper eadem recta locati reperiuntur, puncta earundem irregularia poſſunt appellari. Quum autem iis in locis tot ſectiones coire queant in unum, quotus eſt numerus arcuum evaneſcentium, ſuper eadem recta locatorum, auctus unitate; liquet, hujuſmodi puncta non poſſe locum habere in lineis ſecundi ordinis; quia aliter fieri poſſet, ut eas recta in pluribus, quam duobus, punctis ſecaret. Tantum ergo in lineis, quæ ſecundum ordinem excipiunt, poterunt dari. Verum, ne generale
*art.800. theorema evertatur de numero * punctorum, in quibus linea cujuſque ordinis a recta ſecatur, omnino neceſſe eſt, ut in hujuſmodi punctis arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta collocati, debeant eſſe non plures, quam duo, in lineis tertii ordinis; non plures, quam tres, in lineis ordinis quarti; non plures, quam quatuor, in lineis ordinis quinti; atque ita deinceps.

845. Neque vero puncta iſta irregularia

erunt

erunt ſemper ejuſdem indolis. Jam enim vidimus paulo ante *, duos arcus evaneſcentes, qui ſeſe invicem excipiunt, ſuper eadem recta locari, quotieſcumque punctum, lineam deſcribens, vel non mutat directionem ſuam, vel ab ea deflectit per angulum, omnium maximum. Plane vero, quum primum contingit, punctum recta progreditur, & duo illi arcus naſcentes jacent in directum; ſed ubi alterum accidit, punctum recta regreditur, & eorundem arcuum ſecundus ſuper primo aptatur. Itaque, ſi duo ſint arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta locati; jam punctum irregulare, in quo ii reperiuntur, duplicis ſpeciei eſſe poterit. Nam, vel arcus illi jacent in directum, & vocabitur punctum progreſſus; vel alter ſuper altero aptatur, & punctum regreſſus appellabitur.

* art. 743.

846. Pone nunc, tres eſſe arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta collocatos. Atque hic pariter duo contingere queunt. Nam, vel omnes jacere poſſunt in directum; vel, tam ſecundus ſuper primo, quam tertius ſuper ſecundo aptari poteſt. Unde ſimiliter punctum irregulare erit, vel progreſſus, vel regreſſus. Finge jam, arcus evaneſcentes eſſe quatuor. Et quaternario hoc numero tres erunt caſus poſſibiles. Primo enim jacere poſſunt omnes in directum. Secundo, continuis inflexionibus, tres reliqui ſuper primo aptari queunt. Et denique fieri poteſt, ut duo jaceant in directum, & alii duo, vel ſuper iis, vel ſuper eorum alterutro aptentur. Unde, præter punctum progreſſus, & punctum regreſſus, tertium ab utroque diverſum hic poterit locum habere: quod tamen vocabimus punctum mixtum;

quan-

quandoquidem ejus eſt indolis, ut quodammodo ex utroque participet.

847. Utcumque autem augeantur numero arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta collocati, novæ ſpecies punctorum irregularium non poterunt locum habere. Unde dicimus, punctum irregulare triplicis ſpeciei eſſe poſſe, progreſſus, regreſſus, & mixtum. Vocatur progreſſus, quum arcus evaneſcentes, qui in eo reperiuntur, ſuper eadem recta collocati, jacent omnes in directum. Vocatur regreſſus, quum, continuis inflexionibus, omnes reliqui ſuper primo eorum arcuum coacervantur. Ac denique vocatur mixtum, quum ex arcubus iis duo, aut plures jacent in directum, & reliqui ſuper iis ita quidem aptantur, ut numerus arcuum ſuperimpoſitorum, vel ſit idem ubique, vel pari numero ſit major in uno loco, quam in alio.

848. Licebit interim puncta irregularia, pro numero arcuum evaneſcentium, qui ſuper eadem recta locati reperiuntur, ſubinde primum in genera diſpeſcere, ut dicantur primi generis, quum ii arcus fuerint duo; ſecundi generis, quum fuerint tres; tertii generis, quum fuerint quatuor; atque ita deinceps. Deinde vero hæc genera in memoratas illas ſpecies rurſus erunt diſtinguenda: ſed ita tamen, ut tam ſub primo, quam ſub ſecundo genere, dumtaxat punctum progreſſus, & punctum regreſſus exiſtant; ſub aliis vero generibus, quæ excipiunt primum, & ſecundum, non modo illa duo, verum etiam punctum, quod vocavimus mixtum, reperiatur. Neque enim tribus arcubus punctum mixtum haberi poteſt; quum nume-

rus

rus arcuum ſuperimpoſitorum debeat * eſſe, vel idem ubique, vel pari numero major in uno loco, quam in alio. *art.847.

849. Sed videamus modo, quid per puncta iſta irregularia lineis ipſis accidere debeat. Hunc in finem notare prius oportet, duas lineæ portiones, quas irregulare punctum a ſe mutuo ſeparat, jacere ad contrarias partes rectæ illius, ſuper qua arcus evaneſcentes ſunt collocati, quum horum numerus eſt par; jacere vero ad eandem partem, ubi eorundem numerus eſt impar. Neque vero difficile erit, rationem hujus intelligere. Jam enim, relate ad eam rectam, ſub puncto irregulari tot ſectiones coeunt * in unum, quotus eſt numerus arcuum evaneſcentium, auctus unitate. Unde, ſicuti, quum arcus illi ſunt finitæ longitudinis, nequit dari locus tot ſectionibus, niſi illud obtineat; ita neceſſe eſt, ut idem pariter locum habeat, ubi evaneſcunt arcus illi, & cum ipſa recta coincidunt. *art.844.

850. Jam recta illa, ſuper qua omnes arcus evaneſcentes ſunt collocati, eſt tangens utriuſque ex iis portionibus, quas irregulare punctum a ſe mutuo ſeparat. Quare utraque portio ſuam ei rectæ convexitatem obvertet: & propterea id, quod quærimus facile erit definire. Nam primo, ſi numerus arcuum evaneſcentium ſit par, prodibit linea ipſa ſub puncto irregulari; inflexa, quum eſt progreſſus; cuſpidata, quum eſt regreſſus; & modo inflexa, modo cuſpidata, quum punctum illud eſt mixtum. Et ſecundo, ſi numerus arcuum evaneſcentium ſit impar; ſive punctum irregulare ſit progreſſus, ſive regreſſus, ſive mixtum, prodibit linea ipſa

ſub

ſub eo puncto ſubinde regularis, ac ſi nullum tale punctum haberet. Nam, ſicuti in priore caſu arcus extremi poſſunt, tum ad eandem, cum ad plagas contrarias dirigi; ita in hoc alio caſu iidem arcus ſemper ad contrarias partes tendere debent.

851. Cæterum nolo hic reticere, quod, tam punctum regreſſus, quam punctum mixtum, non ſimplex, ſed ſubinde multiplex debet haberi, quotus eſt major numerus arcuum ſuperimpoſitorum; hoc eſt duplex, ſi fuerit binarius; triplex, ſi ternarius; quadruplex, ſi quaternarius; atque ita deinceps: adeo nempe, ut ſicuti recta, ſuper qua locati ſunt omnes arcus evaneſcentes, qui ſub puncto irregulari reperiuntur, cenſenda eſt * in loco illo ſecare lineam in tot punctis, quota eſt multitudo eorum arcuum, aucta unitate; ita quamlibet aliam rectam, quæ tranſibit per punctum illud, in tot punctis eandem lineam ibidem ſecare putandum ſit, quotus eſt major numerus arcuum ſuperimpoſitorum.

* Ar. 843.

852. Hac ratione, ſi arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta locati, fuerint quatuor, quemadmodum habetur punctum progreſſus, quum abſque ulla inflexione omnes jacent in directum; ita habetur punctum regreſſus, quum ternis inflexionibus tres reliqui aptantur ſuper primo. Unde illud quidem erit punctum ſimplex, hoc vero velut punctum quadruplex debet haberi. Puncto autem mixto bifariam locus fieri poteſt. Primo, quum jacent in directum arcus duo priores, & inflexione una alii duo ſuper iis aptantur. Deinde, quum jacent quidem in directum priores duo arcus, ſed alii duo

in-

Inflexionibus totidem aptantur ſuper ſecundo. Quare primum quidem erit punctum duplex, ſecundum vero velut punctum triplex oportet habeatur.

853. Verum quidem eſt, quod in puncto mixto, quum non eſt idem ubique numerus arcuum ſuperimpoſitorum, nec etiam ubique eſt eadem puncti ejus multiplicitas. Sed id minime nobis impedimento eſſe debet, quominus tale punctum, velut ſubinde multiplex, habeatur, quotus eſt major numerus arcuum ſuperimpoſitorum. Neque enim calculo determinare licebit, num recta, quæ ducitur per punctum illud, tranſeat per locum, in quo numerus eorum arcuum eſt minor. Interim, quum revera tranſit recta per hujuſmodi locum; ob arcus deficientes, etiam interſectionum nonnullæ deficient. Quumque interſectiones pari ſemper numero deficere * debeant; hinc eſt, ut, quum non eſt idem ubique numerus arcuum ſuperimpoſitorum, debeat eſſe * pari numero major in uno loco, quam in alio. *art. 806. *art. 847.

854. Punctum porro multiplex haberi etiam poteſt per interſectionem crurum, quæ ad eandem lineam pertinent. Si enim linea aliqua multa habeat crura, & ex iis duo, aut plura ſeſe invicem ſecent in eodem puncto; tunc punctum illud interſectionis ad ſingula illa crura peræque pertinebit; adeoque totuplex erit, quot ſunt ea crura, quæ in puncto illo ſeſe mutuo ſecant. Sed nihil obſtat, quominus duo ejuſdem lineæ crura ſeſe mutuo tangant, & poſt contactum rurſus recedant a ſe invicem. Id vero quum contingit, habebitur in loco contactus ſimiliter

pun-

punctum duplex : adeo nempe, ut omnis re
quæ lineam ſecat in loco illo, in duobus p
ctis ibidem lineam ſecare cenſenda ſit.

855. Sed notetur hoc loco velim, quod,
duo, aut plura lineæ crura ſeſe mutuo ſeca
eodem puncto ; habebit unumquodque cru
puncto illo ſuam tangentem peculiarem, & p
priam : quam proinde in tot punctis lineam
dem ſecare putandum eſt, quotus eſt num
crurum, auctus unitate : adeo nempe, u
crura, ſeſe invicem ſecantia, fuerint duo, t
gens cujuſque cruris in tribus punctis linea
dem occurret. Non perinde vero res eſt, q
duo lineæ crura ſeſe mutuo tangunt, & p
contactum rurſus recedunt a ſe invicem. T
enim habebunt in loco contactus eandem t
gentem, coeuntibus nimirum in unum duab
eorum tangentibus. Unde communis hæc ta
gens non quidem in tribus, ſed in quatuor pu
ctis, lineam ibidem ſecare cenſenda eſt.

856. Nihil etiam obſtat, quominus in lo
co, in quo duo lineæ crura ſeſe invicem, ve
tangunt, vel ſecant, habeat vel unum, vel u
trumque crus punctum aliquod irregulare.
Id vero quum contingit, facile erit, ex dictis
dijudicare, quotus eſſe debeat numerus pun
ctorum, in quibus eo in loco lineam ſecat, ſi
ve tangens cruris unius, ſive recta quævis alia
a tangente diverſa. Ut, ſi crus unum habeat pun
ctum irregulare ſecundi generis, quod ſit triplex
natura ſua, & eo in loco tangatur ab alio crure,
cujus curſus ibidem ſit regularis ; communis
quidem tangens ſecabit in loco illo lineam in ſex
punctis; quælibet vero alia recta, nonniſi in qua-
tuor

tuor punctis ibidem lineam ſecabit.

857. Puncta porro multiplicia, quæ habentur per contactum, vel interſectionem duorum crurum, in poſterum etiam velut irregularia habebimus; eaque ad ſua quæque genera revocabimus, pro maximo numero punctorum, in quibus recta iis in locis lineam ſecare poteſt: ideo nempe, ut dicenda ſint generis primi, quum ibidem dari poteſt triplex interſectio; dicenda generis ſecundi, ubi quadruplex interſectio locum ibidem habere poteſt; atque ita deinceps. Unde puncta regularia deinceps appellabimus, in quibus non modò non extant duo, aut plures arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta locati, ſed quæ ſua etiam gaudent ſimplicitate.

858. Denique, ne aliquid hic miſſum faciamus quod ſcitu ſit dignum, notabimus, punctum irregulare, quòd progreſſus appellavimus, ſemper in uno ex cruribus ipſius lineæ ſuam poſitionem habere; ſed non item punctum regreſſus, & punctum mixtum: ut quæ poſſunt quandoque ſejuncta a cruribus omnibus reperiri. Unde vero id fiat, alibi quidem oſtendemus. Hic tantum addomus, quod in iſto caſu recta illa, in qua locantur omnes arcus evaneſcentes, qui ſub eo puncto reperiuntur, in tot præcise punctis lineam ibidem ſecare cenſenda eſt, quotus eſt numerus arcuum illorum. Quod quidem liquido conſtabit, ubi notum evadet, qua ratione fiat, ut punctum regreſſus, & punctum mixtum ſejuncta a cruribus omnibus ipſius lineæ poſſint interdum reperiri.

859. Inde vero patebit etiam, hujuſmodi puncta tunc demum poſſe reperiri ſejuncta a

cruribus omnibus, quum pares numero habent ubique arcus ſuperimpoſitos. Unde, ſicuti nec puncta regreſſus, nec puncta mixta, ſub quibus numerus arcuum evaneſcentium, ſuper eadem recta locatorum, eſt impar, poſſunt talem poſitionem habere; ita eadem poſitio nec omnibus punctis mixtis competere poterit, quæ pari numero arcuum evaneſcentium conſtituuntur. Sic, quum quatuor ſunt arcus evaneſcentes, ſuper eadem recta locati, poteſt iis conſtitui pun-
*ar. 852. ctum mixtum, faciendo *, ut duo jaceant in directum, & alii duo inflexionibus totidem ſuper eorum alterutro aptentur; ſed hujuſmodi punctum mixtum ſejunctum a cruribus omnibus nequaquam poteſt reperiri.

V. *Ratio determinandi tangentes linearum, relate ad puncta, tum regularia, tum irregularia.*

860. Nunc de ratione determinandi tangentes linearum agendum
FIG. 83. nobis erit. Et quidem, ſi recta MT, lineam contingens in puncto M, conveniat cum linea abſciſſarum AB in puncto T; innoteſcet ejus poſitio, ſi, demiſſa ex puncto contactus M ordinata MN, nota ſit ratio, quum habet ordinata iſta MN ad ſubtangentem NT. Hanc vero ut inveniamus, ducatur recta MO, ipſi AB parallela; tumque, ſcribendo $x + sz + q$ loco x,
*ar. 718. & $rz + p$ loco y, transformetur ſubinde * lineæ æquatio, ut evadat MO linea abſciſſarum, & MT linea ordinatarum. Jamque, ſi M ſit punctum regulare, relate ad ipſam MT duo ſectio-

num

num puncta coibunt * in unum. Quare novam *art. 839.
æquationem oportebit eſſe talis formæ, ut, poſita $x = 0$, bis fiat in ea $z = 0$; proindeque id, quod quærimus, in hypotheſi, quod M ſit punctum regulare, facile erit, invenire.

861. Primo enim, quum in transformata æquatione poni debeat $x = 0$; ad minuendum calculi laborem, ſatis erit, ab initio ſcribere $sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y. Deinde, quum in nova æquatione fieri debeat bis $z = 0$, duos ejus poſtremos terminos nihilo æquales eſſe oportebit. Ponatur ergo nihilo æqualis quiſque eorum terminorum; & habebuntur hoc pacto duæ aliæ æquationes: quarum una oſtendet nobis rationem, quam habet p ad q; altera eam exhibebit, quæ eſt inter r, & s. Quum autem hæc poſterior ratio ſit illa eadem, quam habet MN ad NT; iſta pariter nota nobis evadet. Quumque punctum M ſit in ipſius lineæ perimetro, ſitque AN $= q$, & MN $= p$; omnino neceſſe eſt, ut æquatio, definiens rationem inter p, & q, ſit ejuſdem formæ cum æquatione lineæ primitiva.

862. Sed uno, aut altero exemplo rem oſtendamus. Itaque, ſit primum $y^2 - ax + x^2 = 0$ ipſius lineæ æquatio. Jamque, ſcribendo $sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y, mutabitur ea in hanc aliam $(r^2 + s^2)z^2 + (2pr + 2qs - as)z + (p^2 - aq + q^2) = 0$. Ponantur alterius hujus æquationis poſtremi duo termini nihilo æquales; & habebitur, tum $p^2 - aq + q^2 = 0$, cum $2pr + 2qs - as = 0$. Quemadmodum autem prior æquatio eſt ejuſdem formæ cum æquatione propoſita $y^2 - ax + x^2 = 0$; ita ex poſteriore erui-

tur $r:s=(a-2q):2p$. Erit igitur, ut $a-2q$ ad $2p$, ita MN ad NT: & propterea, quum ſit MN $=p$, fiet NT $=2p^2:(a-2q)$. Quumque ex priore æquatione $p^2-aq+q^2=0$ deducatur $p^2=aq-q^2$; erit etiam NT $=(2aq-2q^2):(a-2q)$.

863. Sit ſecundo $y^3-xy^2-a^3=0$ lineæ æquatio. Sane, ſcribendo $sz+q$ loco x, & $rz+p$ loco y, vertetur ea in hanc aliam $(r^3-r^2s)z^3+(3pr^2-2prs-qr^2)z^2+(3p^2r-p^2s-2pqr)z+(p^3-p^2q-a^3)=0$. Et, æquatis nihilo alterius hujus æquationis duobus terminis poſtremis, fiet, tum $p^3-p^2q-a^3=0$, cum $3p^2r-p^2s-2pqr=0$. Harum autem æquationum prior eſt ejuſdem plane formæ cum æquatione propoſita $y^3-xy^2-a^3=0$; poſterior vero exhibet $r:s=p:(3p-2q)$. Unde erit, ut p ad $3p-2q$, ita MN ad NT; adeoque, quum ſit MN $=p$, erit NT $=3p-2q$, hoc eſt æqualis differentiæ inter triplum ordinatæ MN, & duplum abſciſſæ AN.

864. Hac igitur methodo tangentes punctorum regularium determinare licebit. Ope autem ejus perſpicuum eſt, quod, ubi lineæ æquatio eſt $y^2-ax+x^2=0$, linea ordinatarum AC tangit lineam in ipſa abſciſſarum origine A. Nam, faciendo $x=0$, jam bis habetur $y=0$. Et quia idem evenit quoque, quum ponitur $x=a$; liquet, ordinatam, quæ huic abſciſſæ correſpondet, eſſe ſimiliter lineæ tangentem. Eadem autem ratione, ſi æquatio lineæ ſit $y^2-ax-x^2=0$; fiet ejus tangens, tam ordinata, quæ correſpondet abſciſſæ $x=0$, quam quæ refertur ad abſciſſam $x=-a$. Verum, ſi lineæ

æqua-

æquatio ſit $ay^2 - x^3 + 3a^2x - 2a^3 = 0$, erit quidem tangens ejus ordinata, quæ refertur ad abſciſſam $x = -2a$, ſed non item ordinata, cui correſpondet abſciſſa $x = a$.

865. Id autem mirum videri non debet. Etſi enim utroque caſu bis fiat $y = 0$; attamen, ponendo $y = 0$, æquatio mutatur in hanc aliam $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, ex qua ſemel quidem eruitur $x = -2a$, bis vero $x = a$. Quare punctum, in quo fit, tum $x = a$, cum $y = 0$, non eſt ſimplex, ſed duplex; adeoque, relate ad ordinatam, quæ ei puncto correſpondet, coeunt in unum ſectiones duæ, non quia ordinata illa eſt tangens, ſed quia tranſit per punctum duplex. Quocirca notandum hoc loco eſt, quod, ut ordinata, quæ alicui abſciſſæ correſpondet, pro lineæ tangente haberi poſſit, haud quidem ſatis eſt, ut, relate ad eam, bis fiat $y = 0$; ſed requiritur quoque, ut abſciſſa ipſa non habeat in æquatione valores æquales.

866. Neque vero, ut aliqua ordinata lineæ tangens evadat, neceſſe eſt ſemper, ut reſpectu ejus bis habeatur $y = 0$. Plane enim, quum id contingit, fit ordinata lineæ tangens, quia duos habet valores æquales. Unde quælibet ordinata, quæ uni eidemque abſciſſæ duobus valoribus æqualibus correſpondet, pro lineæ tangente debet haberi. Ita, ſi habeatur æquatio $y^2 - 2ay + ax = 0$; erit lineæ tangens ordinata, quæ correſpondet abſciſſæ $x = a$. Nam in hoc caſu æquatio evadit $y^2 - 2ay + a^2 = 0$, in qua incognita y duos habet valores æquales. Et ſimiliter, ſi æquatio ſit $y^2 - 2ay + x^2 = 0$; erit tangens ipſius lineæ, tam ordinata, quæ corre-

ſpondet abſciſſæ $x = a$, quam quæ refertur ad abſciſſam $x = -a$.

867. Illud interim ſemper requiritur, ut abſciſſa, cui talis ordinata correſpondet, non habeat in æquatione valores æquales. Unde, ſi habeatur æquatio $ay^2 - 2a^2y - x^3 + 3a^2x - a^3 = 0$; erit quidem lineæ tangens ordinata, quæ refertur ad abſciſſam $x = -2a$; ſed non item ordinata, cui correſpondet abſciſſa $x = a$. Etſi enim utroque caſu æquatio fiat $ay^2 - 2a^2y + a^3 = 0$, ſive $y^2 - 2ay + a^2 = 0$; attamen, ſi in eadem æquatione ſcribatur a loco y, vertetur ea in hanc aliam $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$: ex qua ſemel quidem eruitur $x = -2a$, bis vero $x = a$: id, quod indicat, ordinatam, quæ correſpondet abſciſſæ $x = a$, ad punctum duplex pertinere.

868. Quemadmodum autem ordinata, quæ uni eidemque abſciſſæ duobus valoribus æqualibus correſpondet, pro lineæ tangente debet haberi; ita, ſi contingat viciſſim, ut, relate ad aliquam ordinatam, habeat abſciſſa duos valores æquales, fiet tangens ipſius lineæ recta, quæ ex extremitate ejus ordinatæ æquidiſtanter ducitur lineæ abſciſſarum. Id vero nullam habet difficultatem: ut quod liquet abunde, ſi abſciſſæ in ordinatas, & per contrarium ordinatæ in abſciſſas convertantur. Tantum notabimus, ordinatam illam, cui abſciſſa duobus valoribus æqualibus correſpondet, ratione tangentis, quæ fit parallela lineæ abſciſſarum, eſſe maximam, vel minimam ordinatarum omnium, hinc inde ab ipſa jacentium.

869. Sit jam M punctum irregulare primi generis. Et quoniam ſub eo, relate ad tangentem

MT

 *art.844.
MT, tria ſectionum puncta coeunt * in unum; 848.
transformata, ut prius *, æquatione, oportebit, *art.861.
ter fieri $z = 0$. Id vero fieri non poteſt, niſi æquationis ejus tres termini poſtremi ſint nihilo æquales. Quare, iis nihilo æquatis, habebuntur duæ æquationes pro ratione, quam habet r ad s. Earum autem æquationum ope, facile erit, invenire valorem, quem habere debet ſub puncto illo, tum abſciſſa AN $= q$, cum ordinata MN$=p$. His vero valoribus inventis, ipſam quoque rationem, quæ ſub eodem illo puncto eſſe debet inter r, & s, hoc eſt inter ordinatam MN, & ſubtangentem NT, determinare licebit.

870. Et quidem, ſicuti, pro determinanda ratione, quam ſub puncto irregulari r ad s debet habere, duæ habentur æquationes; ita ejus valor ex utraque erui debet. Etſi enim earum æquationum una quidem efficiat, ut duæ tantum ſectiones coeant in unum; altera vero, ut ſimul jungantur ſectiones tres: utraque tamen ſub puncto illo ſubſiſtere debet; quandoquidem nequeunt ſimul copulari ſectiones tres, niſi prius in unum coeant duæ. Quocirca, ſi contingat, ut qui valor eruitur pro ea ratione ex æquatione una, is non præbeatur etiam ab altera: indicio id nobis eſſe debet, inventum punctum non eſſe ejus indolis, ut ſub eo, relate ad tangentem, tria ſectionum puncta coeant ſimul.

871. Interim notandum hoc loco eſt, quod accidit ſæpe ſæpius, ut ex ea æquatione, qua fit, ut duæ tantum ſectiones coeant in unum, valor rationis ipſius r ad s oriatur indefinite expreſſus, hoc eſt æqualis quotienti, qui producitur, dividendo zero per zero. Quum autem hic va-

lor potis ſit, quemlibet valorem realem nobis exhibere; non cenſendus eſt diverſus ab eo, qui oritur ex æquatione altera, quæ efficit, ut jungantur in unum tres ſectiones: & propterea ratio, quam *r* ad *s* debet habere, ab altero illo valore ſuam determinationem accipiet.

872. Contingit id vero, quum punctum irregulare, vel eſt regreſſus, vel etiam interſectio duorum crurum. Nam, quum hujuſmodi punctum natura ſua ſit duplex; ſub eo duæ ſectiones coibunt in unum, non modo relate ad tangentem, verum etiam reſpectu cujuslibet alterius rectæ, per idem punctum tranſeuntis. Unde omnino oportebit, ut valor ejus rationis, qui eruitur ex æquatione illa, qua fit, ut duæ tantum ſectiones coeant in unum, oriatur indefinite expreſſus; quum talis valor communis eſſe debeat ſingulis rectis, quæ per illud punctum duci queunt.

873. Determinata porro ratione, quam *r* ad *s* debet habere, protinus definire licebit naturam, ac indolem ipſius puncti irregularis. Ea etenim ratio oriri poteſt expreſſa, vel unico tantum valore, vel duobus valoribus æqualibus, vel demum duplici valore diverſo. In primo caſu punctum erit progreſſus; quandoquidem, ob arcus in directum jacentes, nonniſi unica tangens ibi datur. In ſecundo caſu punctum erit regreſſus; quia ſub puncto iſto dantur quidem tangentes duæ, ſed quæ, ob mutuam arcuum ſuperimpoſitionem, coeunt in unum. Ac demum in tertio caſu punctum erit interſectio duorum crurum; quum quodlibet crus ſuam habere debeat tangentem peculiarem, & propriam.

874.

874. Ut autem probe intelligatur, unde fiat, ut ratio ipſius r ad s tripliciter oriri poſſit expreſſa, notandum eſt, quod, ſicuti ea illius æquatio, qua fit, ut duæ tantum ſectiones ſimul colligantur, eſt ſemper unius dimenſionis; ita æquatio altera, quæ efficit, ut tres ſectiones coeant in unum, regulariter ad duas dimenſiones aſcendit. Quare, pro duplici alterius hujus æquationis dimenſione fieri optime poteſt, ut ratio ipſius r ad s oriatur expreſſa, modo uno valore, modo duobus valoribus æqualibus, modo demum duplici valore diverſo.

875. Fieri etiam poteſt, ut ratio ipſius r ad s oriatur, indefinite quidem expreſſa in ea æquatione, qua duæ ſectiones cocunt in unum, deſignata vero duobus valoribus imaginariis in æquatione altera, qua tres ſectiones ſimul conjunguntur. Quum id contingit, habetur punctum illud * regreſſus, quod ſuam habet poſitionem, ſejunctam a cruribus omnibus. Sub eo enim tangens, non quidem in tribus, ſed in duobus punctis lineam ſecat. Quum autem idem punctum ſit duplex; non modo tangens, ſed quævis alia recta, quæ tranſibit per illud, ſecabit ibidem lineam in duobus punctis. Unde omnino neceſſe eſt, ut ſub tali puncto utrumque illorum eveniat, quæ fieri poſſe notavimus. *art. 858.

876. Jam, ut hæc omnia ſuis exemplis oſtendamus, eſto prius $x^2y + a^2y - ax^2 = 0$ æquatio lineæ. Itaque, ſcribendo $sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y, mutabitur ea in hanc aliam $rs^2z^3 + (2qrs + ps^2 - as^2)z^2 + (q^2r + 2pqs + a^2r - 2aqs)z + (pq^2 + a^2p - aq^2) = 0$. Æquatis autem nihilo tribus ejus terminis poſtre-

miss

mis; habebitur primo $pq^2 + a^2p - aq^2 = 0$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione propoſita $x^2y + a^2y - ax^2 = 0$; ſecundo $q^2r + 2pqs + a^2r - 2aqs = 0$, unde eruitur $r : s = (2aq - 2pq) : (q^2 + a^2)$; & tertio $2qrs + ps^2 - as^2 = 0$, unde infertur $r : s = (a - p) : 2q$. Hinc erit ulterius $(2aq - 2pq) : (q^2 + a^2) = (a - p) : 2q$: quæ, quum reducatur ad $3q^2 = a^2$, dabit, tum $q = a : \surd 3$, cum $q = - a : \surd 3$. Unde, demum, adhibita priore æquatione $pq^2 + a^2p - aq^2 = 0$, fiet $p = a : 4$.

877. In linea ergo, de qua agitur, dari poterunt duo puncta irregularia; unum quidem definiendum per abſciſſam $q = a : \surd 3$, cui correſpondet ordinata $p = a : 4$; alterum determinandum per abſciſſam $q = - a : \surd 3$, ad quam refertur ordinata p ſimiliter æqualis $a : 4$. In utroque caſu ratio, quam habet r ad s, eundem ſubit valorem; tum in æquatione $r : s = (2aq - 2pq) : (q^2 + a^2)$, qua duæ tantum ſectiones coeunt in unum; cum in æquatione $r : s = (a - p) : 2q$, qua ſimul colliguntur ſectiones tres. Quare revera exiſtent in linea duo illa puncta
* art. 873. irregularia: quorum utrumque erit * progreſſus; quum eadem illa ratio ſemper uno valore expreſſa oriatur.

878. Sit ſecundo $xy^2 + 2a^2y - ax^2 - 3a^2x - 3a^3 = 0$ æquatio lineæ. Sane, ſcribendo $sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y, mutabitur ea in hanc aliam $sr^2z^3 + (2prs + qr^2 - as^2)z^2 + (p^2s + 2pqr + 2a^2r - 2aqs - 3a^2s)z + (p^2q + 2a^2p - aq^2 - 3a^2q - 3a^3) = 0$: cujus ſi tres poſtremi termini ponantur nihilo æquales; fiet primo $p^2q + 2a^2p - aq^2 - 3a^2q - 3a^3 = 0$,

$= 0$, ejuſdem plane formæ cum æquatione propoſita $xy^2 + 2a^2y - ax^2 - 3a^2x - 3a^3 = 0$; Secundo $p^2s + 2pqr + 2a^2r - 2aqs - 3a^2s = 0$, ex qua infertur $r : s = (2aq + 3a^2 - p^2) : (2pq + 2a^2)$; & tertio $2prs + qr^2 - as^2 = 0$, unde eruitur $r^2 : s^2 + 2pr : qs - a : q = 0$. Hinc erit ulterius $(2aq + 3a^2 - p^2)^2 : (2pq + 2a^2)^2 + 2p(2aq + 3a^2 - p^2) : q(2pq + 2a^2) - a : q = 0$: quæ legitime reducta evadet $4a^2q^3 + 12a^3q^2 + 9a^4q + 6a^2p^2q - 3p^4q + 12a^4p - 3a^2p^3 - 4a^5 = 0$.

879. Quum autem in priore æquatione habeatur $p^2q + 2a^2p - aq^2 - 3a^2q - 3a^3 = 0$; multiplicando terminos ejus per $4aq + 4p^2$, fiet $8a^3pq - 4a^2q^3 - 12a^3q^2 - 12a^4q + 4p^4q + 8a^2p^3 - 12a^2p^2q - 12a^3p^2 = 0$. Unde, addendo iſtam cum præcedente, habebitur $p^4q - 6a^2p^2q + 8a^3pq - 3a^4q + 4a^2p^3 - 12a^3p^2 + 12a^4p - 4a^5 = 0$: ex qua eruitur $q = (4a^5 - 12a^4p + 12a^3p^2 - 4a^2p^3) : (p^4 - 6a^2p^2 + 8a^3p - 3a^4) = -4a^2 : (p + 3a)$. Hinc, in prima æquatione $p^2q + 2a^2p - aq^2 - 3a^2q - 3a^3 = 0$ ſcribendo $-4a^2 : (p + 3a)$ loco q, & ejus quadratum loco q^2, vertetur ea in hanc aliam $2p^3 + 3ap^2 - 12a^2p + 7a^3 = 0$: ex qua infertur, tam $p = a$, quam $p = -7a : 2$. Erat autem $q = -4a^2 : (p + 3a)$, Quare, ſi pro p ponatur a, fiet $q = -a$; ſi vero pro p ſcribatur $-7a : 2$, habebitur $q = 8a$.

880. In linea igitur, ad quam pertinet æquatio $xy^2 + 2a^2y - ax^2 - 3a^2x - 3a^3 = 0$, dari poterunt duo puncta irregularia; unum quidem definiendum per abſciſſam $q = 8a$, cui correſpondeat ordinata $p = -7a : 2$; alterum ve-

vero determinandum per abſciſſam $q = -a$, ad quam referatur ordinata $p = a$. Scribendo autem valores iſtos, tum in æquatione $r:s = (2aq - 3a^2 - p^2):(2pq + 2a^2)$, cum in æquatione $r^3:s^3 + 2pr:qs - a:q = 0$; eæ fient $r:s = -1:8$, $r^2:s^2 - 7r:8s - 1:8 = 0$ in primo caſu; & $r:s = 0:0$, $r^2:s^2 - 2r:s + 1 = 0$ in ſecundo. Unde, quia æquationis $r^2:s^2 - 2r:s + 1 = 0$ utraque radix eſt unitas, & æquationis $r^2:s^2 - 7r:8s - 1:8 = 0$ una quidem radix eſt $-1:8$, & altera unitas; revera exiſtent in [b] art. 873. linea duo illa puncta irregularia, eritque [b] primum quidem progreſſus, alterum vero regreſſus.

881. Sit tertio $x^3 - 3a^2x - ay^2 + 2a^2y + a^3 = 0$ æquatio lineæ. Scribendo igitur $sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y, vertetur ea in hanc aliam $s^3z^3 + (3qs^2 - ar^2)z^2 + (3q^2s - 3a^2s + 2a^2r - 2apr)z + (q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p + a^3) = 0$. Et, æquatis nihilo tribus poſtremis terminis iſtius; fiet primo $q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p + a^3 = 0$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione propoſita $x^3 - 3a^2x - ay^2 + 2a^2y + a^3 = 0$; ſecundo $3q^2s - 3a^2s + 2a^2r - 2apr = 0$, quæ præbet $r:s = (3a^2 - 3q^2):(2a^2 - 2ap)$; & tertio $3qs^2 - ar^2 = 0$, quæ exhibet $r^2:s^2 = 3q:a$. Hinc fiet ulterius $(3a^2 - 3q^2)^2:(2a^2 - 2ap)^2 = 3q:a$: quæ legitime reducta evadet $3q^4 - 6a^2q^2 - 4a^3q + 8a^2pq - 4ap^2q + 3a^4 = 0$.

882. Quum autem in priore æquatione habeatur $q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p + a^3 = 0$; multiplicando per $4q$, fiet $4q^4 - 12a^2q^2 - 4ap^2q + 8a^2pq + 4a^3q = 0$: ex qua ſi præcedens illa ſubtrahatur, remanebit $q^4 - 6a^2q^2 + 8a^3q$

$8a^3q - 3a^4 = 0$. Hæc autem æquatio præbet, tum $q = a$, cum $q = -3a$. Et quoniam quiſque horum valorum, ſubſtitutus loco q in priore æquatione $q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p + a^3 = 0$, dat $p = a$; dari poterunt in linea, de qua agitur, duo puncta irregularia: unum quidem definiendum per abſciſſam $q = a$, cui correſpondeat ordinata p, ſimiliter æqualis a; alterum vero determinandum per abſciſſam $q = -3a$, ad quam referatur ordinata p, etiam æqualis a.

883. Scribo itaque primum a, & $-3a$ loco p, & q in æquationibus $r : s = (3a^2 - 3q^2) : (2a^2 - 2ap)$, & $r^2 : s^2 = 3q : a$. Quumque una fiat $r : s = 6 : 0$, & altera $r^2 : s^2 = -9$; liquet, radicem prioris æquationis nequaquam exhiberi per aliquam ex radicibus ſecundæ. Quare punctum, quod determinatur per abſciſſam $q = -3a$, & per ordinatam $p = a$, haud quidem tale erit *, ut ſub eo relate ad tangentem tres ſectiones coeant in unum. Scribo poſtea in iiſdem æquationibus a, tam pro p, quam pro q. Et quia earum una dat $r : s = 0 : 0$, altera $r^2 : s^2 = 3$, ex qua eruitur, tum $r : s = \sqrt{3}$, cum $r : s = -\sqrt{3}$; liquet, alterum punctum irregulare revera dari in linea, de qua agitur: quod erit * duorum crurum interſectio; quum ſub eo ratio ipſius r ad s duos ſubeat valores diverſos.

*art. 870.

*art. 873.

884. Sit demum $x^3 - 3a^2x - ay^2 + 2a^2y - 3a^3 = 0$ æquatio lineæ. Sane, ſcribendo $sz + q$ loco x, & $rz + p$ loco y, mutabitur ea in hanc aliam $s^3z^3 + (3qs^2 - ar^2)z^2 + (3q^2s - 3a^2s + 2a^2r - 2apr)z + (q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p - 3a^3) = 0$: cujus ſi tres termini poſtremi æquentur nihilo; habebitur primo $q^3 -$

$3a^2q - ap^2 + 2a^2p - 3a^3 = 0$, ejuſdem formæ cum æquatione propoſita $x^3 - 3a^2x - ay^2 + 2a^2y - 3a^3 = 0$; ſecundo $3q^2s - 3a^2s + 2a^2r - 2apr = 0$, ex qua infertur $r : s = (3a^2 - 3q^2) : (2a^2 - 2ap)$; & tertio $3qs^2 - ar^2 = 0$, unde eruitur $r^2 : s^2 = 3q : a$. Hinc erit ulterius $(3a^2 - 3q^2)^2 : (2a^2 - 2ap)^2 = 3q : a$ quæ legitime reducta evadet $3q^4 - 6a^2q^2 - 4a^3q + 8a^2pq - 4ap^2q + 3a^4 = 0$.

885. Quum autem in priore æquatione habeatur $q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p - 3a^3 = 0$; multiplicando per $4q$, fiet $4q^4 - 12a^2q^2 - 4ap^2q + 8a^2pq - 12a^3q = 0$: ex qua ſi præcedens illa ſubducatur, remanebit $q^4 - 6a^2q^2 - 8a^3q - 3a^4 = 0$. Hæc autem æquatio exhibet, tum $q = -a$, cum $q = 3a$. Et quoniam quiſque horum valorum, ſubſtitutus loco q in priore æquatione $q^3 - 3a^2q - ap^2 + 2a^2p - 3a^3 = 0$ præbet $p = a$; dari poterunt in linea, de qua eſt quæſtio, duo puncta irregularia: unum quidem definiendum per abſciſſam $q = -a$, cui correſpondeat ordinata $p = a$; alterum vero determinandum per abſciſſam $q = 3a$, ad quam referatur ordinata p, ſimiliter æqualis a.

886. Scribo itaque primum a, & $3a$ loco p & q in æquationibus $r : s = (3a^2 - 3q^2) : (2a^2 - 2ap)$, & $r^2 : s^2 = 3q : a$. Quumque una fiat $r : s = -6 : 0$; & altera $r^2 : s^2 = 9$; liquet, radicem prioris æquationis nequaquam exhiberi per aliquam ex radicibus ſecundæ. Quare punctum, quod determinatur per abſciſſam $q = 3a$
art. 870. & per ordinatam $p = a$, haud quidem tale erit, ut ſub eo, relate ad tangentem, tres ſectiones coeant in unum. Scribo deinde in iiſdem æquatio-

tio-

tionibus a, & $-a$ loco p, & q. Quumque earum una fiat $r:s=0:0$, altera $r^2:s^2=-3$, cujus utraque radix eſt imaginaria; conſequens eſt *, ut alterum punctum ſit regreſſ[illegible]uam habens poſitionem, ſejunctam a cr[illegible] lineæ. * art. 875.

887. Cæterum in lineis tertii ordinis, tum punctum irregulare primi generis, cum tangens puncti ejus ab ipſa earum æquatione interdum exhibetur. Hac ratione, ſi æquatio lineæ ſit, vel $y^3=a^2x$, vel $y^3=ax^2$, reperietur punctum irregulare in ipſa abſciſſarum origine, ejuſque tangens erit linea ordinatarum; quandoquidem in utraque æquatione, faciendo $x=0$, jam ter habetur $y=0$. Sed idem punctum erit ſimplex in prima, & duplex in ſecunda. Nam, ponendo viciſſim $y=0$, ex ea quidem ſemel, ex iſta vero bis eruitur $x=0$. Atque ita quoque, ſi æquatio lineæ ſit $y^3=ax^2-x^3$, dabuntur in ea duo puncta irregularia; unum quidem ſimplex, determinandum per abſciſſam $x=a$; alterum vero duplex, definiendum per abſciſſam $x=0$: & utriuſq; tangens erit ordinata correſpondens.

888. Neque vero, ut in lineis tertii ordinis aliqua ordinata tangens evadat puncti irregularis, neceſſe eſt ſemper, ut reſpectu ejus ter habeatur $y=0$. Plane enim, quum id contingit, fit ordinata tangens puncti ejus, quia tres habet valores æquales. Unde quælibet ordinata, quæ in lineis tertii ordinis uni eidemque abſciſſæ tribus valoribus æqualibus correſpondet, pro tangente puncti irregularis debet haberi. Qua ratione, ſi lineæ æquatio ſit, vel $y^3-3ay^2+3a^2y=a^2x$, vel $y^3-3ay^2+3a^2y=2a^2x-ax^2$; erit tangens puncti irregularis ordinata,

quæ

quæ correſpondet abſciſſæ $x = a$. Nam, ponendo a loco x, utraque æquatio evadit $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 = 0$, in qua ordinata y tres habet valores æquales.

889. Agnoſcetur autem, num punctum irregulare ſit ſimplex, aut duplex, per ipſam abſciſſam, cui talis ordinata correſpondet. Si enim hujuſmodi abſciſſa non habeat in æquatione valores æquales, punctum erit ſimplex; quod ſi vero duos in illa æquales valores ſubeat, punctum erit duplex. Ita punctum irregulare, exiſtens in linea, ad quam pertinet æquatio $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y = a^2x$, erit ſimplex; quadoquidem, ſcribendo a loco y, æquatio evadit $a^3 = a^2x$, ex qua ſemel tantum eruitur $x = a$. Viciſſim vero punctum irregulare, quod exiſtit in linea, exhibita per æquationem $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y = 2a^2x - ax^2$, erit duplex; nam, ponendo a loco y, æquatio fiet $a^3 = 2a^2x - ax^2$, ex qua bis quidem infertur $x = a$.

890. Jam, ſicuti ordinata, quæ uni eidemque abſciſſæ, tribus valoribus æqualibus correſpondet, eſt tangens puncti irregularis; ita, ſi contingat viciſſim, ut, relate ad aliquam ordinatam habeat abſciſſa tres valores æquales, fiet tangens puncti irregularis recta, quæ ex extremitate ejus ordinatæ æquidiſtanter ducitur lineæ abſciſſarum. Id vero nullam habet difficultatem: ut quod liquet abunde, ſi abſciſſæ in ordinatas, & per contrarium ordinatæ in abſciſſas convertantur. Tantum notabimus, punctum illud irregulare, exhibitum per ordinatam, cui abſciſſa tribus valoribus æqualibus correſpondet, eſſe ſimplex, ſi illiuſmodi ordinata non habeat

beat

beat in æquatione valores æquales; eſſe vero duplex, ſi duos in illa valores æquales admittat.

891. Fieri etiam poteſt, ut ordinata, cui tribus valoribus æqualibus abſciſſa correſpondet, tres etiam valores æquales habeat in æquatione. Id vero quum contingit, haud quidem putandum eſt, punctum irregulare eſſe triplex: neque enim hujuſmodi punctum dari poteſt in lineis tertii ordinis; ſed concludere debemus, punctum illud eſſe interſectionem duorum crurum; & ordinatam quidem eſſe tangentem unius cruris, abſciſſæ vero parallelam eſſe tangentem cruris alterius. Ita in æquatione $y^3 + x^3 = axy$, poſita $x = 0$, fit ter $y = 0$; & viciſſim, poſita $y = 0$, fit ter $x = 0$. Quare, relate ad lineam, cui ea competit æquatio, dabitur in ipſa abſciſſarum origine duorum crurum interſectio: quorum unum continget ibidem linea abſciſſarum, alterum linea ordinatarum.

892. Non diſſimili methodo procedendum, ſi M ſit punctum irregulare ſecundi generis. Sub eo enim, relate ad tangentem MT, quatuor ſectionum puncta coibunt in unum; adeoq; transformata ut prius * æquatione, oportebit, quater fieri $z = 0$. Quum autem id fieri nequeat, niſi quatuor ejus termini poſtremi evaneſcant; ponendi ii erunt revera nihilo æquales: qua ratione tres habebuntur æquationes pro ratione, quam habet r ad s; una quidem, qua duæ tantum ſectiones ſimul colliguntur; altera, qua coeunt in unum ſectiones tres; & tertia demum, qua ſectiones quatuor ſimul coacervantur. *Art. 861.

893. Jam, ſicuti per harum æquationum primam, & ſecundam determinantur * valores, *Art. 869.

quos p, & q habere debent ſub iis punctis, in quibus, relate ad tangentem, tres ſectiones ſimul conjunguntur; ita per earundem æquationum primam, & tertiam definire licebit valores, qui competunt iiſdem p, & q ſub punctis illis, in quibus coeunt in unum quatuor ſectiones. Et quia unio quatuor ſectionum jam eam trium præſupponit; omnino neceſſe eſt, ut valores iſti ab eorum aliquibus non differant. Inventis autem valoribus ipſarum p, & q ſub punctis irregularibus ſecundi generis; ipſam quoque rationem, quæ ſub iiſdem punctis eſſe debet inter r, & s, determinare licebit.

894. Sed hic quoque notandum eſt, quod valor, qui pro ea ratione eruitur ex æquatione una, etiam ab aliis duabus, ſi non ſignanter, ac expreſſe ſaltem indefinite, præberi debet. Neque enim poſſunt ſimul copulari ſectiones quatuor, niſi prius coeant in unum, tam duæ, quam tres. Determinata autem ratione, quam r ad s debet habere; facile erit, definire naturam, ac indolem ipſius puncti irregularis. Jam enim punctum irregulare ſecundi generis, vel eſt progreſſus, vel regreſſus, vel contactus duorum crurum, vel interſectio trium, vel demum interſectio duorum, quorum alterum in loco interſectionis habeat punctum irregulare primi generis, ſive progreſſus, ſive regreſſus. Plane vero quodlibet horum punctorum habet in ea ratione characterem ſuum peculiarem, & proprium.

895. Nam primo, ſi punctum irregulare ſecundi generis ſit progreſſus; orietur ratio illa expreſſa unico valore, ſignanter etiam exhibito per primam æquationem. Secundo, ſi ſit regreſſus; orie-

orietur deſignata tribus valoribus æqualibus. Tertio, ſi ſit contactus duorum crurum, duobus tantum valoribus æqualibus prodibit expreſſa. Quarto, ſi ſit interſectio trium crurum; ſubibit tres valores inæquales. Quinto, ſi ſit interſectio crurum duorum, quorum alterum habeat in loco interſectionis punctum regreſſus primi generis; duos habebit valores æquales, & unum inæqualem. Ac denique, ſi ſit interſectio crurum duorum, quorum alterum habeat in loco interſectionis punctum progreſſus primi generis; orietur expreſſa duobus valoribus æqualibus, qui per primam æquationem indefinite exhibebuntur.

896. Eadem autem eſt operandi ratio, ſi M ſit punctum irregulare, ſive tertii, ſive alterius cujuſvis generis altioris. Unde ſuperfluum puto, ulterius ſuper hoc argumento labores noſtros extendere. Tantum notabimus, tangentes punctorum, tum regularium, cum irregularium, poſſe etiam ex ſecantibus erui. Scribendo enim rz loco y, & $u + sz + q$ loco x, transformare licebit * ſubinde æquationem lineæ, *art. 697. ut, manente eadem linea abſciſſarum AB, evadat recta quævis alia TM linea ordinatarum. Ponendo poſtea $u = o$, dabunt radices æquationis reliquæ puncta, in quibus recta illa lineam ſecat. Unde, fingendo demum, ut æquationis ejus, modo duæ, modo tres, modo quotcumque aliæ radices inter ſe ſint æquales; poterit, methodo radicum æqualium, alibi a nobis explicata, id, de quo agitur, definiri.

VI. *Ratio determinandi aſymptotos linearum, earumque theoria generalis.*

897. SUpereſt, ut de aſymptotis linearum cujuſcumque ordinis agamus. Iſtæ, ut initio hujus capitis * monuimus, ſunt rectæ, quæ contingunt lineas in infinita diſtantia ab ipſarum origine. Verum, etſi quælibet aſymptotus ſit tangens lineæ in diſtantia infinita ab origine ipſarum; non hinc tamen viciſſim quælibet tangens, cujus contactus in infinitum abire ſupponitur, lineæ aſymptotus evadit. Fieri etenim poteſt, ut, puncto contactus in infinitum abeunte, ipſa etiam tangens infinite recedat, nec ullibi reperiatur. Quare ea tantummodo tangens vertetur in aſymptotum, quæ poſitionem retinet aſſignabilem, hoc eſt capacem determinationis, ubi punctum contactus intelligitur in infinitum abire.

*art. 797.

898. Ut ergo linea aliqua aſymptotum habeat, requiritur ſane primum, ut uno ſaltem ſui crure in infinitum extendatur; ſed, non omnem lineam, quæ in infinitum extenditur, putandum eſt, aſymptoto præditam eſſe. Neque enim quicquam obſtat, quominus uno, aut pluribus cruribus abeat quidem linea in infinitum; & nihilominus, ut eorum crurum, vel omnia, vel aliqua ſaltem aſymptoto ſint deſtituta. Sic inter lineas ſecundi ordinis ellipſis aſymptoto caret; quia utrumque ejus crus alicubi terminatur. Parabola autem, etſi utroque crure in infinitum extendatur, adhuc tamen eſt expers aſymptoti; quia tangentes eorum crurum

in

ta diſtantia infinita infinite pariter recedunt.

899. Jam, quum aſymptoti linearum ſint rectæ, quæ eas contingunt in infinita diſtantia ab ipſarum origine, facile erit, ex tangentibus aſymptotos derivare. Contingat enim MT lineam, de qua agitur, in puncto quovis M; tumque ea producatur, uſque donec conveniat, cum linea quidem ordinatarum AC in puncto S, tum linea vero abſciſſarum AB in puncto T. Quærendo itaque poſitionem tangentis MT, determinare licebit valorem ſubtangentis NT: eaque determinata, nota fiet etiam ipſa AT, quæ eſt, vel ſumma, vel differentia duarum AN, NT. Quumque, demiſſa ex puncto contactus M ordinata MN, æquiangula fiant triangula duo MNT, SAT; erit, ut MN ad NT, ita AS ad AT: proindeque, cognitis tribus MN, NT, AT, etiam ipſius AS valor innoteſcet. FIG. 85.

900. Compertis valoribus duarum AT, AS inquirendum eſt porro, quam mutationem ſubeant ii valores, ubi punctum contactus M in infinitum abire ſupponitur. Plane vero tria contingere poſſunt. Primo, ut unus ſaltem eorum valorum oriatur imaginarius. Deinde, ut uterque valor fiat realis ſimul, & infinitus. Ac denique, ut ambo valores oriantur quidem reales ſed vel neuter, vel unus dumtaxat fiat infinitæ longitudinis. In primo caſu crus, ad quod pertinet punctum M, erit aſymptoto deſtitutum; & defectus exinde orietur, quia crus illud non abit in infinitum, ſed alicubi ſiſtitur. In ſecundo caſu crus adhuc erit expers aſymptoti; ſed defectus inde petendus, quia, abeunte in infinitum puncto M, etiam tangens MT infinite rece-

dit. Demum in tertio caſu crus erit aſymptoto præditum; ejuſque poſitio triplex eſſe poterit. Nam primo, vel coincidet cum linea abſciſſarum AB, vel erit ei parallela. Secundo, vel coincidet cum linea ordinatarum AC, vel erit ei æquidiſtans. Denique ad utramque ipſarum AB, AC per datos angulos poterit inclinari.

901. Punctum porro contactus M nequit in infinitum abire, niſi una ſaltem ipſarum AN, MN fiat infinitæ longitudinis. Itaque, ubi inventi ſunt valores portionum AS, AT, conſtabit nobis, quam ii ſubeunt mutationem, quum punctum contactus M abit in infinitum, aſſumendo, quod ſit infinitæ longitudinis, ſive abſciſſa x, ſive ordinata y. Quæcumque autem ipſarum aſſumatur infinita, neceſſe eſt, ut termini illi, in quibus eadem pauciores habet dimenſiones, evaneſcant reſpectu ejus, in quo numerus ſuarum dimenſionum eſt major. Et, ope hujus principii, facile erit, eam, quam quærimus, mutationem inveſtigare. Tentanda eſt vero utraque hypotheſis; tum, quia fieri poteſt, ut, quæ aſymptotus non eruitur ex una, præbeatur viciſſim ab alia; tum etiam, quia ambæ poſitiones duas diverſas aſymptotos ſuppetere queunt. Sed portiones AS, AT ea incognita exprimi debent, cui infinita longitudo deinceps adſcribitur.

902. Etſi autem hoc artificio definire liceat aſymptotos linearum; placet tamen ad id opus, aliam hic methodum uſurpare, paulo concinniorem, & quæ a theoria tangentium minime pendet. Nimirum, ſi Fb ſit aſymptotus lineæ, de qua agitur, conveniens cum linea abſciſſarum AB in F, & cum linea ordinatarum AC in G; licebit

ſcri-

ſcribendo rz loco y, & $u+sz+q$ loco x, ſubinde transformare* æquationem ejuſdem lineæ, ut, manente eadem linea abſciſſarum FB, evadat aſymptotus ipſa Fb linea ordinatarum. Et quoniam aſymptotus contingit lineam in infinita diſtantia; relate ad eam duo ſectionum puncta, non modo ſimul conjungentur, verum etiam abibunt in infinitum. Quare novam æquationem oportebit eſſe talis formæ, ut poſita $u = 0$, bis fiat in ea z infinitæ longitudinis, proindeque poſitionem ipſius aſymptoti, quæ dependet, tum a valore portionis AF $= q$, cum a ratione, quam habet r ad s, ſive AG ad AF, facile erit definire. *Art. 697.

903. Primo enim, quum in transformata æquatione poni debeat $u = 0$; ad minuendum calculi laborem, ſatis erit, ab initio ſcribere rz loco y, & $sz+q$ loco x. Deinde, quum in nova æquatione fieri debeat bis z infinitæ longitudinis; duos ejus priores terminos nihilo æquales eſſe * oportebit. Ponatur ergo nihilo æqualis quiſque eorum terminorum; & habebuntur hoc pacto duæ aliæ æquationes: quarum una oſtendet nobis relationem, quam r ad s, hoc eſt AG ad AF, debet habere; altera, ad indagandum valorem ipſius AF $= q$, poſt cognitam illam rationem, nobis inſerviet. Quemadmodum autem hæc poſterior æquatio, in qua q gerit vices incognitæ, eſt ſemper unius dimenſionis; ita æquatio prior, ubi incognita eſt $r:s$, ad tot ſemper dimenſiones aſcendet, quot adſunt in æquatione lineæ, de cujus aſymptoto agitur. *Art. 810.

904. Hinc pro ratione, quam habet r ad s, tot diverſos valores eruere licebit, quot indicat exponens ordinis, ad quem linea refertur.

Unoquoque autem eorum determinandus e valor, tum ipſius AF $= q$, cum alterius AG $= rq : s$: qua ratione omnes aſymptoti, quibus referta eſt linea, fient nobis cognitæ, ac exploratæ. Cæterum portiones AF, AG ſunt illæ eædem, in quas vertuntur duæ AT, AS, quum relate ad tangentem MT punctum contactus M in infinitum abire ſupponitur. Unde, quæ
art. 900. de iis ſuperius * notata ſunt, hic rurſus repeti debent. Speciatim vero obſervandum hoc loco eſt, quod eos valores, qui imaginariam exhibent rationem ipſius r ad s, tentare non oportet; quum correſpondeant cruribus, quæ alicubi ſiſtuntur, ac terminantur, neque ideo poſſunt aſymptotum ullam habere.

905. Jam, ut hæc omnia generali quodam exemplo, caſus omnes complectente, oſtendamus, capiatur æquatio generalis linearum ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Sane, ſcribendo rz loco y, & $sz + q$ loco x mutatur ea in hanc aliam $(er^2 + frs + gs^2)z^2 + (fqr + 2gqs + hr + is)z + (gq^2 + iq + k) = 0$. Ponantur alterius hujus æquationis priores duo termini nihilo æquales; & habebitur, tum $er^2 + frs + gs^2 = 0$, ſive $er^2 : s^2 + fr : s + g = 0$, cum $fqr + 2gqs + hr + is = 0$. Quum autem prior æquatio ſit duarum dimenſionum, ea pro ratione, quam habet r ad s, duplicem valorem exhibebit; adeoque, quum ſecunda æquatio præbeat $r : s = (-2gq - i) : (fq + h)$, licebit valores ipſarum AF, AG utroque illo valore determinare. Plane vero in iſta æquatione $er^2 : s^2 + fr : s + g = 0$ radices duæ fiunt imaginariæ, ſi $4eg$ ſit quantitas poſi-

tiva, eaque major quadrato, quod ſit ex f. Unde, quum id contingit, linea erit expers aſymptoti. Nec ſane aliter eſſe debet; nam eo in caſu æquatio nos ducit ad ellipſim, quæ ſpatium claudit, nec in infinitum extenditur.

906. Id quum ita ſit, ponamus quantitatem $4eg$, vel eſſe negativam, vel etiam poſitivam, ſed non majorem f^2. Et in hoc alio caſu, ſicuti æquationis ejus radices duæ fiunt reales; ita, ponendo $\sqrt{(f^2 - 4eg)} = l$, una erit $(-f+l):2e$, altera $(-f-l):2e$. Determinando autem valores ipſarum AF, AG utraque earum radicum, habebitur pro prima quidem AF $= (2ei - fh + hl):(f^2 - 4eg - fl)$, & AG $= (-2efi + f^2h - 2fhl + 2eil + hl^2):(f^2 - 4eg - fl)$; pro ſecunda vero AF $= (2ei - fh - hl):(f^2 - 4eg + fl)$, & AG $= (-2efi + f^2h + 2fhl - 2eil + hl^2):(f^2 - 4eg + fl)$. Unde, quia omnes iſti valores fiunt infiniti, quum habetur $4eg = f^2$, atque adeo $l = 0$; conſequens eſt, ut in iſto caſu linea ſit rurſus aſymptotis deſtituta: quemadmodum proculdubio eſſe debet. Nam, ſemper ac habetur $4eg = f^2$, æquatio $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ nos ducit ad parabolam, quæ extenditur quidem in infinitum, ſed omnino caret aſymptotis.

907. Itaque linea, exhibita per æquationem $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, tunc demum duas habebit aſymptotos, quum quantitas $4eg$, vel eſt negativa, vel etiam poſitiva, ſed minor f^2; hoc eſt, uno verbo, quum æquatio illa nos ducit ad hyperbolam. Sed binæ ejus aſymptoti inclinabuntur per datos angulos ad utramque ipſarum AB, AC, ſi nec e, nec g ſit nihilo

æqua-

æqualis. Non perinde vero res erit, ſi earum vel alterutra, vel utraque ſimul evaneſcat. Pone enim primum $e = o$. Et quia in æquatione $er^2 : s^2 + fr : s + g = o$ prior terminus evaneſcit, erit
*art. 809. una ejus radix $- g : f$, altera * $1 : o$. Unde, pro prima quidem radice fiet $AF = (gh - fi) : fg$, & $AG = (- gh + fi) : f^2$; pro ſecunda vero $AF = - h : f$, & $AG = (- h : f) : o = 1 : o$: proindeque una aſymptotus inclinabitur per datos angulos ad utramque ipſarum AB, AC; altera vero parallela fiet lineæ ordinatarum AC.

908. Pone ſecundo $g = o$. Et quoniam in æquatione $er^2 : s^2 + fr : s + g = o$ evaneſcit ultimus terminus; erit una ejus radix $- f : e$, altera $o : 1$. Unde fiet, pro prima quidem radice $AF = (ei - fh) : f^2$, & $AG = (- ei + fh) : ef$; pro ſecunda vero $AF = (- i : f) : o = 1 : o$, & $AG = - i : f$: proindeque una aſymptotus inclinabitur per datos angulos ad utramque ipſarum AB, AC; altera vero parallela fiet lineæ abſciſſarum AB. Pone demum, tum $e = o$, cum $g = o$. Et quoniam in æquatione $er^2 : s^2 + fr : s + g = o$ evaneſcit, tum primus, cum ultimus terminus; erit una ejus radix $1 : o$, altera $o : 1$. Quare fiet, pro prima quidem radice $AF = - h : f$, & $AG = (- h : f) : o = 1 : o$; pro ſecunda vero $AF = (- i : f) : o = 1 : o$, & $AG = - i : f$: proindeque neutra aſymptotus inclinabitur per datos angulos ad utramque ipſarum AB, AC; ſed una fiet parallela lineæ ordinatarum AC, altera evadet æquidiſtans lineæ abſciſſarum AB.

909. Jam, ut reliquos caſus proſequamur, qui poſſunt occurrere, ponamus, non modo $e = o$, & $g = o$, verum etiam $i = o$. Et, ſicuti in

in iſto caſu ſit adhuc una radix 1 : o, altera o : 1; ita, pro prima quidem radice erit AF = — b:f, & AG = (— b :f) : o = 1 : o ; pro ſecunda vero AF = — b :f, & AG = (— b : f) o = o. Quare una aſymptotus parallela fiet lineæ ordinatarum AC, altera coincidet cum linea abſciſſarum AB. Quod ſi, manentibus e = o, & g = o, ponatur b = o, comperiemus ſimili artificio, unam quidem aſymptotum coincidere cum linea ordinatarum AC, alteram vero parallelam fieri lineæ abſciſſarum AB. Et denique, ſi, exiſtentibus e = o, & g = o, ponatur, tum i = o, cum b = o; binæ aſymptoti tales prodibunt, ut una coincidet cum linea ordinatarum AC, altera coincidet cum linea abſciſſarum AB.

910. Quemadmodum autem hac alia methodo determinantur omnes linearum aſymptoti paulo facilius, & independenter a tangentibus; ita, ope ejus, facile erit oſtendere, unamquamque lineam non plures aſymptotos habere poſſe, quam indicat exponens ordinis, ad quem linea refertur. Jam enim, pro determinandis aſymptotis, methodi hujus beneficio, primo ſcribendum eſt * in æquatione lineæ rz loco y, & $sz + q$ loco x; deinde ponendi ſunt nihilo æquales priores duo termini novæ æquationis. Vidimus autem hoc pacto, duas alias haberi æquationes; unam pro indaganda relatione, quam r ad s, hoc eſt AG ad AF debet habere; alteram, pro inquirendo valore ipſius AF = q, poſt cognitam illam relationem. Unde, quum harum æquationum prior non plures habere poſſit dimenſiones, quam adſunt in æquatione lineæ, de qua agitur; conſequens eſt, ut lineæ ipſa totidem, & non

* art. 903.

non plures, aſymptotos poſſit etiam habere.

911. Cæterum, ubi linea aliqua tot habet aſymptotos, quot indicat exponens ordinis, ad quem linea ipſa refertur, obtinebit relate ad eam proprietas iſta: nimirum, quod, ſi ducatur recta quævis ſecans, tum omnes aſymptotos, cum omnia crura lineæ, ad quæ aſymptoti referuntur, & capiantur rectæ iſtius ſegmenta, aſymptotis, & cruribus intercepta; ſumma eorum, quæ ex quibuſdam aſymptotis tendunt ad plagam unam, æqualis eſſe debet ſummæ illorum, quæ ex aſymptotis aliis ad plagam contrariam diriguntur. Eſt autem præclara iſta proprietas affinis ei, quam relate ad hyperbolam conicam demonſtravit Apollonius: nempe, quod, ſi in ea ducatur recta quævis cum utraque aſymptoto conveniens; duo ejus ſegmenta, hyperbola, & aſymptotis intercepta, æqualia ſint inter ſe. Nam profecto iſtorum ſegmentorum unum ex aſymptoto una tendit ad partem unam; alterum ex aſymptoto altera tendit ad partem oppoſitam.

912. Ad hanc porro proprietatem oſtendendam, ſternendum eſt prius hoc lemma: quod, ſi fuerint plures rectæ, utcumque ad ſe invicem inclinatæ, & intra eas plures aliæ parallelæ, ſingulis occurrentes, ducantur; recta, quæ ita ſecat duas iſtarum parallelarum, ut ſumma ſegmentorum ex uno ſecantis latere ſit æqualis ſummæ ſegmentorum ex latere alio, ſecabit eodem modo omnes alias parallelas. Neque vero difficile erit, veritatem hujus lemmatis intelligere. Jam enim poſitio earum rectarum, utcumque ad ſe invicem inclinatarum, definiri poteſt una eademque æquatione, ad tot dimenſiones aſcendente, quotus

tus eſt numerus ipſarum rectarum. Quare, ſi lineam concipiamus, cui iſta competat æquatio, fient ejus crura omnes illæ rectæ: & propterea per id quod ſupra * demonſtravimus, omnino neceſse eſt, ut relate ad eas obtineat lemma, de quo agitur. *Art.748.

913. Jam ex hoc lemmate illud conſequitur, quod, ſi linea aliqua tot habeat aſymptotos, quot indicat exponens ordinis, ad quem linea ipſa refertur, & ordinatæ unius ex ejus diametris occurrant cum aſymptotis omnibus; eæ ab ipſa diametro perinde ſecabuntur terminatæ ad aſymptotos, ac ſectæ ſunt, quum ad lineæ crura omnia terminantur. Nam, quum aſymptoti ſint rectæ, quæ contingunt lineam in infinita diſtantia ab ejus origine; utique in diſtantia illa dabuntur ad minimum binæ ordinatæ, quæ habebunt eoſdem terminos, tam relate ad aſymptotos, quam relate ad lineæ crura. Unde, conſiderando omnes ordinatas, velut terminatas ad aſymptotos; jam duæ ex iis ſubinde ſecantur à diametro, ut ſumma ſegmentorum ex uno ſecantis latere adæquet ſummam ſegmentorum ex latere alio: & propterea, vi lemmatis oſtenſi *, etiam ordinatæ aliæ ab eadem diametro eadem ratione ſecabuntur. *Art.912.

914. Hinc vero facile modo erit, proprietatem illam oſtendere, de qua eſt quæſtio: nempe, quod, ſi linea aliqua tot habeat aſymptotos, quot indicat exponens ordinis, ad quem linea ipſa refertur, & ducta recta quavis, ſecante tum omnes aſymptotos, cum omnia crura lineæ, capiantur rectæ iſtius ſegmenta, aſymptotis, & cruribus intercepta; ſumma eorum, quæ

ex

ex quibuſdam aſymptotis tendunt ad plagam unam, æqualis eſſe debet ſummæ illorum, quæ ex aſymptotis aliis ad plagam contrariam diriguntur. Inveniatur enim diameter, cujus recta illa ſit ordinata. Et jam eadem ratione, qua ea ſecta eſt a diametro, quum ad lineæ crura terminatur, ſecabitur ab eadem diametro, ubi terminatur ad aſymptotos. Unde, ſicuti id fieri nequit, niſi eorum ſegmentorum, de quibus agitur, quædam ex aſymptotis quibuſdam tendant ad plagam unam, alia ex aſymptotis aliis tendant ad plagam oppoſitam; ita facile apparebit, ſummam priorum ſegmentorum ſummam aliorum adæquare.

915. Ponamus, exempli gratia, lineam eſſe tertii ordinis, tribuſque adeo aſymptotis eſ-
FIG. 84. ſe refertam. Sit CDE recta, de qua eſt quæſtio; eaque aſymptotis quidem occurrat in punctis C, D, E, cruribus vero lineæ in punctis *c*, *d*, *e*. Sit jam AB diameter, cujus recta illa eſt ordinata, & cum ea conveniat in puncto B. Itaque erit, tum B*e* æqualis duabus B*d*, B*c*, cum BE æqualis duabus BD, BC. Id vero fieri non poteſt, ſi aſymptoti relate ad crura jaceant ad eandem partem. Nam, ſi ponantur omnes ad dexteram; BE major quidem erit ipſa B*e*, quum tamen aliæ duæ BD, BC aliis duabus B*d*, B*c*, ſingulæ ſingulis, ſint minores. Quod ſi vero ponantur omnes ad ſiniſtram; erit viciſſim BE minor ipſa B*e*, quum tamen aliæ duæ BD, BC aliis duabus B*d*, B*c*, ſingulæ ſingulis, ſint majores. Itaque omnino neceſſe eſt, ut, relate ad crura, duæ aſymptotorum jaceant ad partem unam, tertia vero ad partem oppoſitam.

916.

916. Jaceat ergo aſymptotus, tranſiens per punctum C, ad dexteram ſui cruris; & aliæ duæ, quæ tranſeunt per puncta D, & E, jaceant ad ſiniſtram. Oſtendendum eſt itaque, ipſam Cc aliis duabus Dd, Ee ſimul ſumptis æqualem eſſe. Id vero liquet abunde. Jam enim habetur, tum $Be = Bd + Bc$, cum $BE = BD + BC$. Quare, ſi ſecunda æquatio ex priore ſubducatur; erit $Be - BE = Bd - BD + Bc - BC$; &, tranſponendo, $Be - BE + BD - Bd = Bc - BC$. Jam vero $Be - BE$ eſt Ee, itemque $BD - Bd$ eſt Dd, ac denique $Bc - BC$ eſt Cc. Itaque erit $Ee + Dd = Cc$; adeoque ſegmenta, quæ ex duabus aſymptotis tendunt ad plagam unam, erunt ſimul æqualia ſegmento, quod ex aſymptoto tertia tendit ad plagam oppoſitam.

917. Illud etiam reticere hic nolo, quod, quum aſymptotus ſit recta, quæ lineam contingit in infinita diſtantia ab ipſius origine; ea, ad inſtar cujuſque tangentis, intelligenda eſt in diſtantia illa ſecare lineam in duobus punctis. Hinc, ſi ordo ipſius lineæ, ad quam refertur aſymptotus, interſectiones exigat plures, quam duas; neceſſe eſt, ut aliæ iſtæ interſectiones in locis aliis contingant: & propterea recta, quæ eſt aſymptotus lineæ alicujus, eam nullibi ſecabit, ſi fuerit ſecundi ordinis; ſecabit autem in puncto alio, ſi fuerit ordinis tertii; in aliis duobus punctis, ſi ordinis quarti; in aliis tribus punctis, ſi ordinis quinti; atque ita deinceps. Interim fieri poteſt, ut linea in infinita illa diſtantia punctum habeat irregulare; & tunc plane oportebit, ut aſymptotus, vel nullibi, vel in pauciore punctorum numero lineam ſecet.

CAPUT V.

Ratio diſtinguendi ſpecies linearum cujuſcumque ordinis.

918. Quemadmodum univerſa linearum moles, pro numero dimenſionum, ad quas earum æquationes aſcendunt, in varios ordines diſtinguitur; ita, ſi primum ordinem excipias, in quo recta ſola continetur, omnes alii ordines varias ſub ſe ſpecies comprehendunt. Hac ratione lineæ ſecundi ordinis æquationibus definiuntur, quæ ad duas dimenſiones aſſurgunt. Notum eſt autem, lineas haſce non ejuſdem indolis eſſe, ſed ad tres ſpecies revocari, ellipſim, hyperbolam, & parabolam. Quod vero evenit in lineis ſecundi ordinis, eo magis in lineis altiorum ordinum evenire putandum eſt; quippe quarum æquationes ad majorem dimenſionum numerum aſcendunt.

*ar. 611. 919. Ut enim vidimus ſuperius *, quicumque ſit ordo linearum, ſemper generalis æquatio confici poteſt, quæ omnes ejus ordinis lineas nobis exhibeat. Plane vero, ſicuti habetur ejuſmodi æquatio, includendo in ea terminos omnes, qui ibidem poſſunt reperiri, & efficiendo, ut ſinguli termini ſuos habeant coefficientes indeterminatos; ita, pro variis relationibus, quas coefficientes iſti habere poſſunt inter ſe, ſuboriuntur variæ ſpecies linearum, quæ ſub eodem ordine continentur. Unde, quia diverſæ iſtæ relationes eo numero majores evadunt,

dunt, quo ipſius æquationis altior eſt gradus; plane neceſſe eſt, ut quo altior eſt ordo linearum, eo majorem ſpecierum numerum comprehendat.

920. Qua igitur ratione diſtinguendæ ſint ſpecies linearum cujuſque ordinis, oſtendendum nobis erit hoc capite. Etſi enim eæ oriantur ex variis relationibus, quas habere poſſunt inter ſe coefficientes indeterminati, qui in æquatione generali, omnes dati ordinis lineas exhibente, continentur; attamen, ad indagandas varias haſce relationes, arte quadam opus eſt, quæ ſingulas noſtro animo ſiſtere valeat, nec patiatur, ut aliqua earum nos effugiat. Plane vero artificium omne huc ferme redit, ut ipſam illam generalem æquationem, velut ſummum aliquod genus, primo per differentias ſimpliciores, tum per alias magis compoſitas eouſque dividamus, donec omnes quæſitæ ſpecies occurrant.

I. *Linearum cujuſque ordinis claſſes præcipuæ ſtatuuntur.*

921. UT natura cujuſque lineæ definitur per æquationem, quæ exhibet nobis relationem inter ordinatam, & abſciſſam correſpondentem; ita omnibus lineis id commune accidit, ut, tum relate ad lineam abſciſſarum, cum relate ad lineam ordinatarum, non plura crura poſſint habere, quam indicant dimenſiones ſuarum æquationum. Jam ab hiſce cruribus petenda eſt prima, ac ſimplicior differentia, quæ inter lineas cujuſque ordinis ſtatui debet. Nam ex iis interdum unumquodque

abit in infinitum, nec ullibi terminum agnoſcit: quandoque quodlibet ſiſtitur ad aliquem terminum, nec ultra progreditur; ac denique non-nunquam quædam pergunt in infinitum, alia vero alicubi ſiſtuntur, ac deſinunt.

922. Itaque, ubi ſpecies linearum enumerandas aggredimur, quæ ſub dato aliquo ordine continentur; hos primo caſus, velut magis generaliores, oportet a ſe mutuo diſtinguamus. Neque vero id factu difficile erit. Si enim ordinetur æquatio relate ad utramque incognitam ſimul, ponaturque, ut utraque earum incognitarum ſit infinitæ longitudinis; ſemper termini illi, in quibus id, quod incognitum eſt, pauciores habet dimenſiones, evaneſcent relate ad primum, in quo numerus ſuarum dimenſionum eſt major. Unde, ſi, iis deletis, fiat æquatio ex ſolis partibus termini prioris; poterunt, ope hujus æquationis, caſus, de quibus agitur, a ſe mutuo diſtingui.

923. Jam enim æquatio iſta exprimit nobis relationem inter ordinatam, & abſciſſam correſpondentem in hypotheſi, quod utraque ipſarum eſt infinitæ longitudinis. Itaque, quum hujus æquationis omnes radices ſunt reales; omnia crura lineæ abibunt in infinitum, nullumque dabitur, quod alicubi terminum agnoſcet. Ubi vero per contrarium ejuſdem æquationis radices omnes ſunt imaginariæ; ſingula crura lineæ ſiſtentur ad aliquem terminum, nec ultra progredientur. Ac denique, quotieſcumque ex iis radicibus quædam ſunt reales, & aliæ imaginariæ; quædam ex cruribus lineæ abibunt in infinitum, alia vero alicubi ſiſtentur, ac deſinent.

924.

924. Quod ſi autem conſideremus, eandem æquationem ad tot ſemper dimenſiones aſcendere, quot ab exponente ordinis linearum indicantur; perſpicuum fiet, tres caſus memoratos non ſemper in ſingulis linearum ordinibus poſſe omnes locum habere. Primo enim caſus ille, in quo ſingula crura lineæ alicubi ſiſtuntur, ac deſinunt, non poterit contingere in iis linearum ordinibus, quorum exponentes ſunt numeri impares. Nam, relate ad ordines iſtos, ea, de qua agitur, æquatio etiam ad dimenſiones numero impares attollitur; adeoque numquam fieri poteſt, ut omnes ejus radices evadant imaginariæ; quippe quæ pari ſemper numero in æquationibus occurrunt.

925. Deinde caſus, in quo quædam crura lineæ abeunt in infinitum, alia vero alicubi ſiſtuntur, ac deſinunt, non poterit locum habere in lineis ordinis ſecundi. Nam, ſicuti lineæ iſtæ, tum relate ad lineam abſciſſarum, cum relate ad lineam ordinatarum, nonniſi duo crura habere poſſunt; ita æquatio illa, de qua eſt quæſtio, velut ſecundi gradus, vel utramque radicem realem habet, vel utramque imaginariam. Itaque ſinguli tres caſus dumtaxat in iis linearum ordinibus obtinebunt, quorum indices ſunt numeri pares, & majores etiam numero binario. Nam dumtaxat relate ad ordines iſtos æquatio, qua caſus ii diſtinguuntur, habere poteſt, tum omnes radices reales, tum omnes imaginarias, tum deniq;aliquas reales, & aliquas imaginarias.

926. Ex eo porro, quod radices imaginariæ pari ſemper numero in æquationibus occurrunt, fit quoque, ut numerus crurum, quæ ali-

cubi ſiſtuntur, ac deſinunt, in ſingulis linearum ordinibus par ſemper eſſe debeat. Unde etiam neceſſe eſt, ut multitudo crurum, quæ per contrarium abeunt in infinitum, ſit impar in ordinibus, quorum exponentes ſunt numeri impares; & viciſſim par in ordinibus, qui pares numeros pro ſuis exponentibus habent. Qua ratione in ſecundo linearum ordine, vel nullum, vel utrumque crurum in infinitum abibit. In tertio autem, ſicuti unum ad minimum crus in infinitum abire neceſſe eſt; ſic plane repugnat, ut duo tantum crura nullos extenſionis ſuæ fines agnoſcunt, ſed oportebit, ut una cum iis tertium quoque infinite recedat.

627. Ut autem hæc omnia uno, aut altero exemplo clariora evadant, capiatur primo æquatio generalis linearum ſecundi ordinis $(ey^2 + fxy + gx^2) + (by + ix) + k = 0$. Jamque, si in ea utraque incognitarum infinitæ longitudinis ſtatuatur, evaneſcet relate ad $ey^2 + fxy + gx^2$, tum k, cum $by + ix$. Unde in eadem hypotheſi, deletis terminis evaneſcentibus, eadem æquatio reducetur ad hanc aliam $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$, ſive $y^2 : x^2 + fy : ex + g : e = 0$: &, propterea duo crura lineæ revera abibunt in infinitum, nec ullibi terminum agnoſcent, quum æquationis ejus utraque radix eſt realis; ſiſtentur vero ad aliquem terminum, nec ultra progredientur, quum per contrarium ejuſdem æquationis utraque radix eſt imaginaria.

928. Capiatur ſecundo æquatio generalis linearum tertii ordinis $(ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (by + ix) + k = 0$, & in ea ſimiliter ponatur, ut utraque incognita-

tatum infinitam habeat longitudinem. Relate igitur ad $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3$ evaneſcet, non modo k, verum etiam tum $by + ix$, cum $cy^2 + fxy + gx^2$. Quare in eadem hypotheſi, deletis terminis omnibus evaneſcentibus, reducetur eadem æquatio ad hanc aliam $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$, ſive $y^3 : x^3 + by^2 : ax^2 + cy : ax + d : a = 0$, quæ velut tertii gradus habebit, vel omnes radices reales, vel unam realem, & duas imaginarias.

629. Hinc, ſicuti in lineis ſecundi ordinis, nonniſi duo caſus poſſunt locum habere; unus, quum utrumque crurum abit in infinitum; alter, quum utrumque ſiſtitur ad terminum aliquem; ita etiam in lineis tertii ordinis duo dumtaxat caſus obtinebunt. Nam cubicæ ejus æquationis, vel omnes radices ſunt reales, & omnia crura abibunt in infinitum; vel una eſt realis, aliæque duæ imaginariæ, & ex cruribus tribus unum quidem infinite recedet, alia vero duo alicubi ſiſtentur, ac deſinent. Quocirca, ſicuti in lineis ſecundi ordinis fieri nequit, ut unum ex cruribus abeat in infinitum, & alterum alicubi ſiſtatur; ita in lineis ordinis tertii plane repugnat, ut crura omnia aliquos ſuæ extenſionis fines agnoſcant.

930. Jam crura, quæ alicubi ſiſtuntur, ac terminantur, unius plane ſunt generis, & dicentur deinceps crura elliptica, ſeu defectiva. Non perinde vero ſunt ea, quæ in infinitum extenduntur; quum eorum alia ſint generis hyperbolici, & alia generis parabolici. Etſi enim non aliud crus poſſit eſſe aſymptoto refertum, quam quod in infinitum extenditur; nihilominus no-

*art.891. tavimus ſupra * , non omne crus, quod abit in infinitum, aſymptoto præditum eſſe. Itaque ex cruribus, quæ infinite recedunt, vocabimus in poſterum crura hyperbolica, quæ aſymptotis ſunt referta; & crura parabolica, quæ aſymptotis deſtituuntur.

931. Neque vero difficile erit intelligere, cur ad illiuſmodi crura a ſe invicem diſtinguenda iſthæc a nobis vocabula adhibeantur. Nimirum, quia in hyperbola conica duo ejus crura, & pergunt in infinitum, & ſuas habent aſymptotos; per contrarium vero in parabola conica bina ipſius crura progrediuntur quidem in infinitum, ſed omnino carent aſymptotis. Unde etiam intelligere licet, cur crura illa, quæ aliquos ſuæ extenſionis fines agnoſcunt, nec abeunt in infinitum, elliptica, ſeu defectiva a nobis appellentur; nempe quia in ellipſi Apollоniana utrumque ejus crus alicubi ſiſtitur, ac terminatur.

932. Itaque, ſicuti lineæ omnes, tum relate ad lineam abſciſſarum, cum relate ad lineam ordinatarum, non plura crura poſſunt habere, quam dimenſiones indicant ſuarum æquationum; ita crura illa triplicis generis eſſe queunt, hyperbolica, parabolica, & elliptica. Quum autem tria hæc genera crurum poſſint, non modo ſeorſim, verum & junctim quoque ad lineæ conſtitutionem concurrere; liquet, præter hyperbolas, parabolas, & ellipſes puras, dari etiam poſſe hyperbolas parabolicas, hyperbolas ellipticas, hyperbolas parabolico-ellipticas, ac denique parabolas ellipticas.

933. Hinc linearum, quæ ſub dato aliquo or-

ordine continentur, ſeptem claſſes dari queunt, & non plures. Prima etenim continet hyperbolas puras, quarum crura omnia ſunt hyperbolica. Secunda continet hyperbolas parabolicas, quarum crura ſunt, partim hyperbolica, partim parabolica. Tertia continet hyperbolas ellipticas, in quibus crura quædam ſunt hyperbolica, & alia elliptica. Quarta continet hyperbolas parabolico-ellipticas, quæ conſtant ex cruribus, partim hyperbolicis, partim parabolicis, & partim ellipticis. Quinta continet parabolas puras, quarum crura omnia ſunt parabolica. Sexta continet parabolas ellipticas, quæ coaleſcunt ex cruribus, partim parabolicis, & partim ellipticis. Ac ſeptima demum continet ellipſes puras, quarum crura omnia ſunt elliptica.

934. Neque vero putandum eſt, omnes has ce claſſes in ſingulis linearum ordinibus obtinere. Jam enim conſtat, lineas ſecundi ordinis eſſe, vel hyperbolas puras, vel parabolas puras, vel denique puras ellipſes. Itaque quatuor linearum claſſes exulant ab eo ordine. Similiter autem in tertio ordine, ſicuti nequeunt locum habere ellipſes puræ, ita neque etiam ſubſiſtere poſſunt hyperbolæ parabolico-ellipticæ, & parabolæ ellipticæ. Quare lineæ tertii ordinis erunt, vel hyperbolæ puræ, vel hyperbolæ parabolicæ, vel hyperbolæ ellipticæ, vel demum puræ parabolæ. Generaliter vero puræ ellipſes non in aliis ordinibus haberi poſſunt, quam in iis, quorum exponentes ſunt numeri pares; eæque plane exules eſſe debent ab ordinibus illis, quorum exponentes ſunt numeri impares.

II. *Quomodo crura parabolica ab hyperbolicis ſint diſtinguenda.*

935. IN quolibet linearum ordine licebit recenſitas claſſes a ſe invicem diſtinguere, mediante æquatione, quam prior terminus generalis ejus ordinis æquationis, nihilo æquatus, nobis ſuppeditat, quæque oſtendit radicibus ſuis, quæ quidem crura abeunt in infinitum, quæve non item. Quemadmodum enim, ſi quæ exiſtunt in illa æquatione radices imaginariæ, eæ ad crura totidem elliptica referuntur, quæ proinde pari ſemper numero in lineis occurrunt; ita, ſi in eadem æquatione radices reperiantur æquales, eæ unico excepto caſu, de quo deinceps verba faciemus, ad crura totidem parabolica nos ducent. Nec ſane difficile id erit oſtendere, ſi methodi recordemur, ſuperius traditæ, pro definiendis linearum aſymptotis.

FIG. 83. 936. Nimirum, ſi F*b* ſit lineæ aſymptotus, conveniens cum linea abſciſſarum AB in puncto F, & cum linea ordinatarum AC in puncto G, *art. 902. diximus *, pro ea determinanda, primo ſcribendum eſſe in æquatione lineæ rz loco y, & $sz+q$ loco x; deinde ponendos eſſe nihilo æquales priores duos terminos novæ æquationis. Quemadmodum autem, id agentes, duas alias habemus æquationes; ita notavimus, iſtarum æquationum primam uſui nobis eſſe, pro definienda ratione, quam r ad s, hoc eſt AG ad AF debet habere; alteram, pro inquirendo valore ipſius AF $=q$, poſt cognitam illam relationem, nobis inſervire.

937.

937. Jam binæ iſtæ æquationes, abſque ulla transformatione, ex ipſa lineæ æquatione data nullo negotio erui poſſunt. Quod ut liquido conſtet, ſit primum ſecundi ordinis linea, de qua eſt quæſtio. Et, ut ſæpius dictum eſt, exhiberi ea poteſt per æquationem iſtam generalem $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Scribendo autem rz loco y, & $sz + q$ loco x; eadem evadit $(er^2 + frs + gs^2)z^2 + (fqr + 2gqs + hr + is)z + (gq^2 + iq + k) = 0$. Et, ponendo duos ejus priores terminos nihilo æquales; fiet $er^2 + frs + gs^2 = 0$ æquatio, qua definiri debet relatio, quam r ad s, ſive AG ad AF debet habere; & $fqr + 2gqs + hr + is = 0$, ſive $q = (-hr - is) : (fr + 2gs)$ æquatio, qua determinandus eſt valor ipſius AF $= q$, poſtquam relatio illa nobis innotuit.

938. Deleantur nunc ex ipſa lineæ æquatione data $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ termini duo poſtremi, in quibus id, quod incognitum eſt, pauciores habet dimenſiones; & ſupererit $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$, ejuſdem plane formæ cum æquatione priore $er^2 + frs + gs^2 = 0$. Fiat poſtea fractio, cujus numerator ſit ſecundus terminus $hy + ix$ ejuſdem æquationis ſub ſigno mutato; denominatur vero id, quod evadit quantitas $ey^2 + fxy + gx^2$, quotieſcumque ejus termini omnes multiplicantur per dimenſiones, quas in iis habet incognita x, & ex ſingulis deletur ejuſdem x dimenſio una. Jamque, ſi huic fractioni ponatur æqualis q; habebitur $q = (-hy - ix) : (fy + 2gx)$, ejuſdem quoque formæ cum æquatione altera $q = (-hr - is) : (fr + 2gs)$.

939.

939. Similiter, ſi linea ſit tertii ordinis, exhiberi ea poteſt per generalem iſtam æquationem $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Scribendo autem rz loco y, & $sz + q$ loco x; eadem vertitur in hanc aliam $(ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3)z^3 + (bqr^2 + 2cqrs + 3dqs^2 + er^2 + frs + gs^2)z^2 + (cq^2r + 3dq^2s + fqr + 2gqs + hr + is)z + (dq^3 + gq^2 + iq + k) = 0$. Et, poſitis duobus ejus prioribus terminis æqualibus nihilo, fiet $ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3 = 0$ æquatio, qua definiri debet relatio, quam r ad s, hoc eſt AG ad AF debet habere; & $bqr^2 + 2cqrs + 3dqs^2 + er^2 + frs + gs^2 = 0$, ſive $q = (-er^2 - frs - gs^2) : (br^2 + 2crs + 3ds^2)$ æquatio, qua determinandus eſt valor ipſius AF $= q$, poſt cognitam illam relationem.

940. Deleantur modo ex ipſa lineæ æquatione data $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ poſtremi tres termini, in quibus id, quod incognitum eſt, pauciores habet dimenſiones; & ſupererit $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$, ejuſdem plane formæ cum æquatione priore $ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3 = 0$. Fiat deinde fractio, cujus numerator ſit ſecundus terminus $ey^2 + fxy + gx^2$ ejuſdem æquationis ſub ſigno mutato; denominator vero id, quod evadit quantitas $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3$, quum ejus termini omnes multiplicantur per dimenſiones, quas in iis habet incognita x, & ex ſingulis deletur ejuſdem x dimenſio una. Jamque, ſi huic fractioni ponatur æqualis q; habebitur $q = (-ey^2 - fxy - gx^2) : (by^2 + 2cxy + 3dx^2)$, ejuſdem quoque formæ cum æqua-

qua-

quatione altera $q = (-er^{2} - frs - gs^{2}) : (br^{2} + 2crs + 3ds^{2})$.

941. Quemadmodum ergo, pro determinanda aſymptoto F*b*, duabus æquationibus eſt opus; una, quæ oſtendat nobis relationem, quam AG ad AF debet habere; altera, quæ, poſt cognitam illam relationem, exhibeat valorem ipſius AF $= q$: ita generaliter prior earum æquationum haberi poteſt, delendo ex ipſa lineæ æquatione data terminos omnes, in quibus id, quod incognitum eſt, pauciores habet dimenſiones; & altera, faciendo, ut q ſit æqualis fractioni, cujus numerator ſit ſecundus terminus ejuſdem æquationis ſub ſigno mutato, denominator vero id, quod evadit terminus prior, quum ejus partes omnes multiplicantur per dimenſiones, quas habet in iis incognita x, & ex ſingulis deletur ejuſdem x dimenſio una.

942. Verum quidem eſt, quod in utraque harum æquationum occurrant incognitæ duæ y, & x, quæ exhibent ordinatam, & abſciſſam in infinita cruris diſtantia ab ejus origine. Sed notare oportet, in hujuſmodi diſtantia y, & x eandem habere rationem inter ſe, quam habet AG ad AF. Nec difficile id erit oſtendere. Nam, quum in diſtantia illa conſtans ſit ratio, quæ eſſe debet inter y, & x; plane neceſſe eſt, ut in eadem diſtantia naſcens augmentum ipſius y ſit ad naſcens augumentum ipſius x in eadem illa conſtanti ratione. Sed, ob rectam F*b*, quæ eſt tangens cruris in infinita diſtantia, illiuſmodi naſcentia augmenta ſunt * inter ſe, ut AG ad AF. Quare omnino opus eſt, ut in infinita diſtantia etiam y ſit ad x, veluti eſt AG ad AF.

* *lib.* 1. *art.* 453.

943. Hinc ſedulo notetur hic velim, quod eadem illa æquatione, qua fit nobis exploratum, quæ crura lineæ abeunt in infinitum, quæve non item, licebit etiam definire poſitiones, quas crura, in infinitum progredientia, habent in infinita illa diſtantia relate, tum ad lineam ordinatarum, cum ad lineam abſciſſarum. Crus namque, quod abit in infinitum, poteſt in diſtantia illa infinita triplicem poſitionem habere. Nam, arcus ejus evaneſcens in ea diſtantia, vel per datos angulos inclinatur, tum ad lineam ordinatarum, cum ad lineam abſciſſarum; vel fit æquidiſtans lineæ ordinatarum, & inclinatur per datum angulum ad lineam abſciſſarum; vel denique per contrarium fit æquidiſtans lineæ abſciſſarum, & inclinatur per datum angulum ad lineam ordinatarum.

944. Singulos autem hos caſus, ope ejus æquationis, facile erit, a ſe invicem diſtinguere. Jam enim illud crus revera in infinitum abire putandum eſt, cui in ea æquatione realis radix correſpondet. Itaque, ſi radix illa ſit finita; indicio id nobis eſſe debet, arcum evaneſcentem ejus cruris in diſtantia infinita inclinari per datos angulos, tum ad lineam ordinatarum, cum ad lineam abſciſſarum. Quod ſi vero eadem illa radix ſit infinita; argumento id nobis erit, eundem arcum evaneſcentem fieri æquidiſtantem lineæ ordinatarum, & inclinari per datum angulum ad lineam abſciſſarum. Ac denique, ſi valor ejus radicis ſit nullus; neceſſe eſt, ut idem arcus evaneſcens fiat æquidiſtans lineæ abſciſſarum, & inclinetur per datum angulum ad lineam ordinatarum.

945.

945. Sed, ut ad id, unde diſceſſimus, revertamur, jam quidem vidimus *, qua ratione duæ illæ æquationes, quibus opus eſt, pro determinandis aſymptotis, ex ipſa lineæ, de qua agitur, æquatione, abſque ulla transformatione, erui poſſunt. Hinc vero facile modo erit oſtendere, quod regulariter crura eſſe debent parabolica, quum ſunt æquales inter ſe radices, quæ eis correſpondent in æquatione, nobis indicante, quæ crura abeunt in infinitum, quæque non item. Hunc in finem capiatur primo æquatio generalis linearum ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Et, ſicuti $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ eſt æquatio, quæ oſtendit radicibus ſuis relationes, quas pro utroque curu habere debet AG ad AF; ita erit $(-hy - ix) : (fy + 2gx)$ fractio, cui ponenda eſt æqualis portio AF $= q$. * art. 941.

946. Jam non aliter crura, quæ pergunt in infinitum, poſſunt eſſe generis parabolici, hoc eſt aſymptotis deſtituta, niſi pro iis portio iſta AF fiat infinitæ longitudinis. Itaque denominator ejus fractionis $fy + 2gx$ pro cruribus parabolicis debet eſſe nihilo æqualis: id, quod ſane fieri nequit, niſi radices duæ hujus æquationis $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$, non modo ſint reales, verum etiam æquales inter ſe. Habetur namque æquatio $fy + 2gx = 0$, multiplicando terminos hujus $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ per numeros 0, 1, 2, qui conſtituunt progreſſionem arithmeticam. Quare per ea, quæ alibi * oſtenſa ſunt, tunc demum locus fieri poteſt æquationi $fy + 2gx = 0$, quum duæ radices iſtius $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ æquales fuerint inter ſe. * lib. 2. art. 806.

947. Capiatur ſecundo æquatio generalis

li-

linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + jx + k = 0$.
Et, ſicuti eſt $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$ æquatio, oſtendens radicibus ſuis relationes, quas pro ſingulis cruribus habere debet AG ad AF; ita erit $(-ey^2 - fxy - gx^2) : (by^2 + 2cxy + 3dx^2)$ fractio, cui ponenda eſt æqualis portio AF $= q$. Hinc pro cruribus parabolicis fiet $by^2 + 2cxy + 3dx^2 = 0$: & propterea, quia æquatio iſta oritur, multiplicando terminos æquationis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$ per numeros 0, 1, 2, 3, qui conſtituunt progreſſionem arithmeticam; omnino oportebit, ut pro cruribus parabolicis æquatio $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$ radices habeat æquales.

948. Si ergo caſum excipias, de quo mox verba faciemus, generaliter ſic ſtatui poteſt, ut crus, pergens in infinitum, tunc demum ſit generis parabolici, ſeu aſymptotis deſtitutum, quotieſcumque in æquatione, nobis oſtendente, quæ crura abeunt in infinitum, quæve non item, radix, ei cruri correſpondens, aliam ſibi habet æqualem; quum dumtaxat in iſto caſu portio AF, relate ad crus illud, fieri poſſit infinitæ longitudinis. Nec ad rem facit, quod, ubi crus, in infinitum progrediens, ſuam habet aſymptotum, quæ vel coincidit cum linea abſciſſarum, vel etiam ei æquidiſtat; tunc portio AF adhuc infinitæ longitudinis fieri debet. Nam facile eſt oſtendere, crus, pergens in infinitum, non poſſe talem aſymptotum habere, quum in æquatione illa radix, ei cruri correſpondens, aliam habet ſibi æqualem.

949. Quum enim pro hujuſcemodi aſym-

pro-

ptoto ratio ipſius AG ad AF infinite parva ſit oporteat; plane neceſſe eſt, ut in ea æquatione ſit nihilo æqualis radix, unde ratio illa eſt eruenda. Id ergo quum contingit, mutetur linea abſciſſarum in aliam, quæ ei utcumque ſit inclinata. Quumque, transformatione iſta, ea radix valorem ſortiatur finitum; finita pariter evadet ratio ipſius AG ad AF, quæ eruitur ex illa radice. Quare, ſicuti, ob aliam radicem, quam ex hypotheſi habet æqualem, portio AF prodibit infinita; ita etiam fiet infinitæ longitudinis portio altera AG; & propterea crus, pergens in infinitum, cui eadem illa radix correſpondet, erit aſymptoto deſtitutum, atque adeo generis parabolici.

III. *Theoria præcedentis caſus ſingularis expenditur.*

959. Vidimus, crus, in infinitum progrediens, eſſe generis parabolici, ſeu aſymptoto deſtitutum, quum in æquatione, nobis oſtendente, quæ crura abeunt in infinitum, quæve non item, radix, ei cruri correſpondens, aliam ſibi habet æqualem. Monuimus autem, excipiendum eſſe caſum unum, in quo longe ſecus contingere poteſt. Accidit id ergo, quum eadem illa radix ejuſmodi eſt, ut per ejus ſubſtitutionem evaneſcat quoque ſecundus terminus ipſius datæ æquationis. Quum enim in hoc caſu evadat nihilo æqualis, non modo denominator, verum etiam numerator fractionis, cui ponenda eſt æqualis portio AF $= q$; fiet AF $= 0 : 0$, hoc eſt indeterminatæ quidem lon-

gi-

gitudinis. Unde, ſicuti id argumento nobis ſe debet, valorem ipſius AF multiplicem debere; ita, ſi contingat, ut aliquis ſaltem rum valorum non fiat infinitus, non obſta radicum æqualitate, dabitur crus aliquod, ſua aſymptotus tribuenda.

951. Hac ratione, quum quæſtio eſt de neis ſecundi ordinis, quarum generalis æquat eſt $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$; ſi ctio, cui poni debet æqualis portio AF = ($-hy - ix$) : ($fy + 2gx$). Plane vero, ſicu quum radices duæ hujus æquationis $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ inter ſe ſunt æquales, denominator eju fractionis ſit æqualis nihilo; ita, ſi fuerit x: $= i : h$, erit etiam æqualis nihilo denominato ejuſdem fractionis. Atque ita quoque in linei tertii ordinis, quarum generalis æquatio eſt $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, fit portio AF = $(-ey^2 - fxy - gx^2) : (by^2 + 2cxy + 3dx^2)$. Unde, ſicuti habetur $by^2 + 2cxy + 3dx^2 = 0$, quum in æquatione $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$ dantur radices æquales; ita, ſi contingat, ut quælibet radicum æqualium ſit æqualis, vel $[-f + \sqrt{(f^2 - 4eg)}] : 2e$, vel $[-f - \sqrt{(f^2 - 4eg)}] : 2e$, erit etiam $-ey^2 - fxy - gx^2 = 0$.

952. Et ſane, quum in determinandis linearum aſymptotis ſæpius occurrat caſus iſte, quo portio AF oritur indeterminatæ longitudinis; ad rem erit, cum hoc loco expendere, ſimulque indicare, qua ratione determinanda ſit valor ejus portionis, ubi idem prodit indeterminatus. Id vero agentes, oſtendemus quoque veritatem ejus, de quo agitur: nempe, quod ta-

tametſi in æquatione, nobis indicante, quæ crura abeunt in infinitum, quæve non item, aliqua radix aliam ſibi habeat æqualem; adhuc tamen fieri poteſt, ut crus, cui ea radix correſpondet, ſuam habeat aſymptotum; atque adeo, ut ſit generis hyperbolici, & non parabolici.

953. Hunc in finem meminiſſe oportet, methodum, a nobis traditam, pro determinandis linearum aſymptotis, huc quidem redire; primo, ut ſcribatur in æquatione lineæ rz loco y, & & $sz + q$ loco x; deinde, ut ponantur nihilo æquales priores duo termini novæ æquationis. Nam, ſicuti vidimus *, habentur hac ratione duæ aliæ æquationes; una, pro indaganda relatione, quam r ad s, hoc eſt AG ad AF debet habere; altera, pro inquirendo valore ipſius AF$=q$, poſt cognitam illam relationem. Itaque, quum portio AF oritur indeterminatæ longitudinis, ponendus eſt nihilo æqualis etiam tertius terminus novæ illius æquationis. Sic enim tertia habebitur æquatio, cujus ope eandem AF determinare licebit. *art. 903.

954. Capiatur ergo æquatio generalis linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Jamque, ſcribendo rz loco y, & $sz + q$ loco x, mutabitur ea in hanc aliam $(ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3)z^3 + (br^2q + 2crsq + 3ds^2q + er^2 + frs + gs^2)z^2 + (crq^2 + 3dsq^2 + frq + 2gsq + hr + is)z + (dq^3 + gq^2 + iq + k) = 0$. Et, ponendo nihilo æquales priores duos terminos novæ hujus æquationis, fiet, tum $ar^3 + br^2s + crs^2 + ds^3 = 0$, cum $br^2q + 2crsq + 3ds^2q + er^2 + frs + gs^2 = 0$. Quare, ſi contingat, ut ex ſe-

cunda iſta æquatione valor ipſius q indetermi- natus oriatur; adeo nempe, ut ſit $(-er^2-frs-gs^2):(br^2+2crs+3ds^2)=0:0$; ponendus erit æqualis nihilo tertius quoque terminus ejus æquationis; qua ratione habebitur $crq^2+3dsq^2+frq+2gsq+br+is=0$, & ex alia iſta æquatione valorem ipſius q eruere oportebit.

*Art. 941.

955. Jam vidimus ſupra *, priores duas æquationes $ar^3+br^2s+crs^2+ds^3=0$, & $br^2q+2crsq+3ds^2q+er^2+frs+gs^2=0$, abſque ulla transformatione, ex ipſa lineæ æquatione data facili negotio erui poſſe. Prima enim habetur, delendo ex ea terminos omnes, in quibus id, quod incognitum eſt, pauciores habet dimenſiones; quum illa, quæ ſupereſt, $ay^3+bxy^2+cx^2y+dx^3=0$ ſit ejuſdem formæ cum ipſa $ar^3+br^2s+crs^2+ds^3=0$. Secunda vero obtinetur, faciendo, ut coefficiens ipſius q ſit id, quod oritur, multiplicando primum partes quantitatis $ay^3+bxy^2+cx^2y+dx^3$ per dimenſiones, quas habet in iis incognita x, tum ſingulas dividendo per x; & ut alter terminus ejus ſit ſecundus terminus $ey^2+fxy+gx^2$ ipſius datæ æquationis; quum ea, quæ ſubinde conſtituitur, $by^2q+2cxyq+3dx^2q+ey^2+fxy+gx^2=0$ ſit adhuc ejuſdem formæ cum ipſa $br^2q+2crsq+3ds^2q+er^2+frs+gs^2=0$.

956. Non diſſimili autem ratione ex eadem lineæ æquatione data, abſque ulla transformatione, erui quoque poterit tertia æquatio $crq^2+3dsq^2+frq+2gsq+br+is=0$: nimirum faciendo, primo, ut coefficiens ipſius q^2 ſit id, quod

quod oritur, multiplicando primum partes quantitatis $by^2 + 2cxy + 3dx^2$ per dimenſiones, quas habet in iis incognita x, tum ſingulas dividendo per $2x$; ſecundo, ut coefficiens ipſius q ſit id, quod gignitur, multiplicando primum partes quantitatis $ey^2 + fxy + gx^2$ per dimenſiones, quas habet in iis incognita x, tum ſingulas dividendo per x; ac denique, ut ultimus terminus ejus ſit tertius terminus $hy + ix$ ipſius datæ æquationis. Nam liquido patet, æquationem, quæ ſubinde conſtituitur, $cyq^2 + 3dxq^2 + fyq + 2gxq + hy + ix = 0$ eandem formam habere cum ipſa $crq^2 + 3dsq^2 + frq + 2gsq + hr + is = 0$.

957. Itaque, ſi in æquatione $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$, quæ oſtendit nobis, quæ crura abeunt in infinitum, quæve non item, contingat, ut aliqua radix aliam ſibi habeat æqualem, & præterea, ut per ejus ſubſtitutionem evaneſcat, tum primus, cum ſecundus terminus ipſius datæ æquationis $(ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy + ix) + k = 0$; tunc erit, tam $by^2 + 2cxy + 3dx^2 = 0$, quam $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$: & propterea omnino neceſſe eſt, ut æquatio $by^2q + 2cxyq + 3dx^2q + ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ præbeat AF indeterminatæ longitudinis. Id ergo quum contingit, determinandus eſt valor ipſius AF, ope alterius æquationis $cyq^2 + 3dxq^2 + fyq + 2gxq + hy + ix = 0$: quæ, quum ſit ſecundi gradus, efficiet, ut ipſa AF duos valores poſſit habere.

958. Duo iſti valores ipſius AF pertinent ad duo illa crura, ad quæ referuntur duæ radices æquales æquationis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y +$

$dx^3 = 0$. Vnde, ſi contingat, ut ii minime riantur infiniti, non obſtante radicum æqua tate, crura erunt hyperbolica, & non jam p rabolica. Fieri autem poteſt, ut vel unus ea rum valorum, vel etiam uterque oriatur rurſ infinitus: nimirum, quum ſubſiſtit, vel pri dumtaxat, vel etiam utraq; harum æquation $cy + 3dx = 0$, & $fy + 2gx = 0$; quandoqui dem hac ratione in nihilum abit, vel dumtax prior terminus, vel etiam uterque ex termin prioribus ipſius æquationis $cyq^2 + 3dxq^2 +$ $fyq + 2gxq + by + ix = 0$. Vbi vero id conti git, vel unum ex cruribus, vel etiam utrum que fiet rurſus parabolicum. Nec ſane diffici erit definire, quando demum id fieri poſſit.

959. Nimirum habetur primo $cy+3dx=0$ quum in æquatione $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx$ $= 0$ radix, de qua agitur, duas alias habet æ quales; nam æqualitas trium radicum efficit, ut ſubſiſtere debeat, tam æquatio $by^2 + 2cxy +$ $3dx^2 = 0$, quam æquatio $cy + 3dx = 0$. Habetur vero $fy + 2gx = 0$, ubi æquales ſunt inter ſe radices iſtius $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$; quum quantitas $fy + 2gx$ oriatur, multi plicando partes hujus $ey^2 + fxy + gx^2$ per dimenſiones, quas habet in iis incognita x, & ſingulas dividendo per x. Vnde conſequens eſt, ut oriatur infinitus unus tantum eorum va lorum, quum radix, de qua agitur, duas habet æquales in æquatione $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3$ $= 0$, & nullam in altera $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$; oriatur vero infinitus uterque valor, quum ea dem illa radix duas habet æquales in priore ea rum æquationum, & unam in ſecunda.

960.

960. Quod autem obtinet in allato exemplo, id in omnibus aliis peræque obtinere putandum eſt. Vnde, pro diſtinguendis cruribus parabolicis, hæc generatim ſtatui poſſunt. Primo, quod iis non aliter locus fieri poteſt, niſi in æquatione, nobis oſtendente, quæ crura abeunt in infinitum, quæve non item, radices dentur æquales. Secundo, quod eæ radices ſemper nos ducunt ad crura parabolica, ubi per earum ſubſtitutionem evaneſcit quidem prior terminus, ſed non item ſecundus ipſius datæ æquationis. Tertio, quod, utroque horum terminorum evaneſcente, crura numquam eſſe poſſunt parabolica, ubi duæ tantum in ea æquatione dantur radices æquales. Quarto, quod, ſi radices æquales fuerint plures, quam duæ, & ſecundus terminus, nihilo æquatus, nonniſi unam earum contineat, unum ex cruribus debet eſſe hyperbolicum. Et denique, quod, ſi æquatio, quam præbet ſecundus terminus, æquatus nihilo, duas pluresve contineat radicum æqualium, tunc omnia crura ſunt parabolica.

961. Sed, in poſtremo iſto theoremate, excipiendus eſt etiam caſus, in quo longe ſecus contingere poteſt: ſcilicet, quum radices æquales tales deprehenduntur, ut per earum ſubſtitutionem evaneſcat quoque tertius terminus datæ æquationis. Ubi enim id accidit, portio AF denuo prodit indeterminatæ longitudinis. Quare, pro ea determinanda, confugere oportebit ad quartum terminum æquationis ejus, quæ oritur, ſcribendo in æquatione lineæ datæ rz loco y, & $sz + q$ loco x. Quumque nihil obſtet, quominus in æquatione, quam præbet quartus

ille terminus, nihilo æquatus, habeat ipſa AF valorem aliquem minime infinitum; nec item quicquam obſtabit, quominus detur aliquod crus, cui ſua aſymptotus tribui debeat. Sed theoriam mox expoſitam facile erit extendere tum ad iſtum quoque caſum, cum ad alios, qui gradatim nobis ſeſe offerunt; & ſuperfluum puto, diutius in hac re immorari.

962. Cæterum mirari non ſubibit, quod, pro determinanda portione AF, ponendi ſunt interdum nihilo æquales, non modo priores duo termini ejus æquationis, quæ oritur, ſcribendo in æquatione lineæ datæ rz loco y, & $z + q$ loco x, verum etiam alii quamplures, qui illos excipiunt. Quamquam enim aſymptotus Fb, velut tangens lineæ in infinita diſtantia ab ejus origine, illud tantum exigere videatur, ut duo priores termini evaneſcant; nihilotamenminus, quemadmodum alibi* monuimus, fieri poteſt, ut linea in infinita illa diſtantia punctum habeat irregulare. Unde omnino neceſſe eſt, ut pro numero arcuum evaneſcentium, qui ſub puncto illo irregulari reperiuntur, augeatur quoque numerus terminorum, qui poni debent nihilo æquales.

*art. 917.

963. Difficultas autem hoc loco occurrit, eaque non contemnenda: nempe, quod, ſi ita res eſſet, lineæ ſecundi ordinis, ſaltem in infinita diſtantia, poſſent quandoque punctum habere irregulare. Neque enim quicquam obſtat, quominus in æquatione $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, quæ omnes ſecundi ordinis lineas exhibet, prior terminus $ey^2 + fxy + gx^2$, nihilo æquatus, præbeat æquationem, in qua radices duæ ſint æquales, & ut per ſubſtitutionem

nem earum radicum evaneſcat, tum primus, cum ſecundus terminus ejus. Itaque, quum id contingit, per ea, quæ paulo ante * dicta ſunt, *art. 953. pro determinanda portione AF, confugere oportebit ad tertium, ſeu poſtremum terminum ejus æquationis, quæ oritur, ſcribendo in æquatione illa rz loco y, & $sz + q$ loco x. Quare omnino neceſſe eſt, ut eodem in caſu linea, cui talis æquatio correſpondet, punctum habeat irregulare in infinita diſtantia.

964. Verum huic difficultati facile fiet ſatis, ſi ſedulo conſideremus, quod, ubi æquatio $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ duas habet radices æquales, & per earum ſubſtitutionem evaneſcit, tum primus, cum ſecundus terminus iſtius $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$; altera iſthæc æquatio induit ſemper hanc formam $a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2 + 2ac^2y + 2bc^2x + d^4 = 0$. Quum enim ex iſta æquatione eruatur, tum $ay + bx + c^2 - \sqrt{(c^4 - d^4)} = 0$, cum $ay + bx + c^2 + \sqrt{(c^4 - d^4)} = 0$: perſpicuum eſt, quod, ſicuti ea non eſt in ſede ſua propria, ſed in duas alias primi gradus dividi poteſt; ita linea ipſa, ad quam ea pertinet æquatio, non eſt ſectio aliqua conica, ſed ex duabus rectis coaleſcit. Quumque rectæ iſtæ fiant ſibi mutuo parallelæ, & rectæ parallelæ in infinita diſtantia tandem conveniant; inde eſt, ut punctum infinite diſtans lineæ, de qua agitur, veluti punctum duplex debeat haberi.

965. Atque hac occaſione notetur hoc loco velim, in infinita diſtantia punctum multiplex haberi poſſe, non modo per omnimodam ſuperimpoſitionem arcuum evaneſcentium, ve-

rum etiam quum ii ad finitum intervallum accedunt. Ita, ſi habeatur æquatio $xy^2 = a^2x + a^3$: ita, ut ſit $y^2 = a^2 + a^3 : x$; liquet, quod, poſita abſciſſa x infinitæ longitudinis, fit æqualis a, tum ordinata poſitiva y, cum ordinata negativa $-y$. Unde intervallum duorum crurum, ex quibus curva conſtat relate ad lineam abſciſſarum, in infinita diſtantia evadit $2a$: proindeque punctum indefinite diſtans ejuſdem curvæ veluti punctum duplex debet haberi: adeo nempe, ut quælibet recta, per illud tranſiens, in duobus punctis lineam ipſam ibidem ſecare cenſenda ſit.

IV. *Subdiviſiones, quæ locum habent in hyperbolis puris.*

966. Conſtitutis claſſibus linearum, quæ ſub dato aliquo ordine continentur, ad earum deinde ſubdiviſiones pergendum eſt. Ut autem ab hyperbolis puris ordiamur, ſicuti in iis omnia crura ſunt hyperbolica, ſic ab horum crurum aſymptotis repetenda eſt prima earum ſubdiviſio. Plane enim fieri nequit, ut omnes aſymptoti ſibi invicem æquidiſtent; ſed nihil obſtat, quominus inter eas aliquæ dentur parallelæ. Itaque jam duo caſus generaliores in iſtiuſmodi hyperbolis ſunt diſtinguendi; primus eſt, quum quædam ex ſuis aſymptotis ſibi mutuo æquidiſtant; alter eſt, quum omnes ſibi invicem occurrunt. Sed, quemadmodum, quum aliquæ dantur parallelæ, pro numero ipſarum varii caſus ſunt ſubdiſtinguendi; ita, relate ad aſymptotos concurrentes, fieri

fieri interdum poteſt, ut ita ſibi invicem occurrant, ut non ſingulæ binæ ad puncta totidem diverſa, ſed omnes ad unum idemque punctum convergant.

967. Et quidem fieri nequit, ut in hyperbolis puris omnes aſymptoti ſibi mutuo æquidiſtent. Quo enim id accidere poſſet, oporteret per ea, quæ paulo ante * oſtenſa ſunt, ut *art. 960. non modo eſſent æquales omnes radices æquationis, quam præbet prior terminus æquationis datæ, nihilo æquatus; verum etiam, ut, poſitis nihilo æqualibus omnibus aliis terminis ejuſdem æquationis, excepto ultimo, eædem, & non aliæ radices in aliis hiſce æquationibus continerentur. Plane vero, quum æquatio eſt hujus formæ, ea * non modo non eſt in ſede ſua propria, ſed *art. 964. ſemper eſt diviſibilis in tot alias primi gradus, quot ſunt ipſius dimenſiones: qua ratione linea ipſa non erit ejus ordinis, quem indicat gradus ſuæ æquationis, ſed ex rectis totidem coaleſcet, ſibi invicem parallelis; quæ haberi poterunt velut ipſius aſymptoti.

968. Nihil autem obſtat, quominus inter aſymptotos talium hyperbolarum aliquæ dentur parallelæ. Jam enim vidimus ſupra *, quod *art. 960. ex radicibus æquationis, quam præbet prior terminus, nihilo æquatus, dari poſſunt aliquæ æquales, & eſſe generis hyperbolici crura, quæ eis correſpondent. Id ergo quum accidit, ob radicum æqualitatem, omnino neceſſe eſt, ut talium crurum aſymptoti fiant ſibi mutuo æquidiſtantes. Quod quum ita ſit, conſequens eſt, ut tunc demum in hyperbolis puris omnes aſymptoti ſibi invicem occurrant, quum in æquatione

ne, quæ oritur, ponendo nihilo æqualem priorem terminum ipſius datæ æquationis, omnes radices ſunt inæquales. Et generaliter, ſicuti radices æquales aſymptotos ſuppetunt parallelas; ſic aſymptoti, quæ ex radicibus inæqualibus eruuntur, ſibi invicem ſemper occurrunt.

969. Nihil etiam obſtat, quominus aſymptoti, ſibi invicem occurrentes, convergant omnes ad unum idemque punctum. Evenit id, quum in æquatione lineæ, de qua agitur, ſecundus terminus, vel deeſt, vel deeſſe poteſt.
*ar.935. Ut enim vidimus ſupra *, pro aſymptotis concurrentibus, quæ ex radicibus inæqualibus eruuntur, valor portionis AF determinandus eſt jugiter per fractionem; cujus numerator eſt ſecundus terminus datæ æquationis, denominator vero id, quod oritur, multiplicando partes prioris termini per dimenſiones, quas habet in iis incognita x, & ſingulas dividendo per x. Itaque, quum deeſt, aut deeſſe poteſt in æquatione terminus ſecundus, valor hujus fractionis prodibit ſemper, vel nihilo æqualis, vel conſtantis longitudinis: & propterea omnino neceſſe eſt, ut ex uno, eodemque puncto aſymptoti omnes egrediantur.

970. Sed circa aſymptotos parallelas non eſt hoc loco reticendum, poſſe interdum, vel omnes, vel plures ipſarum ita ad ſe mutuo accedere, ut coincidant in unum, & nonniſi unicam aſymptotum exhibeant. Jam enim aſymptoti æquidiſtantes præbentur nobis a radicibus æqualibus ejus æquationis, quæ oritur, ponendo nihilo æqualem priorem terminum æquationis datæ; & relate ad eas determinandus eſt valor

por-

portionis AF per eam æquationem, quam ſuppetit ille terminus transformatæ æquationis, quem oſtendit numerus radicum æqualium, auctus unitate. Itaque, ſi contingat, ut in hac æquatione duæ, aut plures occurrant radices æquales; plane oportebit, ut duæ, aut plures ex aſymptotis parallelis coincidant in unum, & unicam tantum aſymptotum exhibeant.

971. Præterea in hyperbolis puris, ſi linea ordinatarum mutetur in aliam, quæ uni ex ſuis aſymptotis ſit parallela; una ex interſectionibus cujuſque ordinatæ cum hyperbola abibit in infinitum; atque adeo incognita, referens ordinatam, aſcendet in æquatione ad dimenſiones, una pauciores. Quin imo, ſi ea aſymptotus, cui ponitur æquidiſtans linea ordinatarum, aliam aut alias habeat aſymptotos parallelas; abibunt in infinitum tot aliæ interſectiones, quotus eſt numerus aliarum aſymptotorum, priori æquidiſtantium: proindeque eadem illa incognita amittet in æquatione totidem alias dimenſiones. Plane vero, ſicuti id paulo ſimpliciorem reddit æquationem ipſius hyperbolæ, ita exinde nova nobis ſubnaſcitur ratio ſubdividendi quemlibet ex caſibus recenſitis.

972. Fiat etenim primo, ut linea ordinatarum evadat æquidiſtans uni ex aſymptotis concurrentibus. Et, ſicuti mutatione iſta incognita, referens ordinatam, amittit in æquatione dimenſionem unam; ita fieri quandoque poteſt, ut relate ad eaſdem ordinatas detur diameter ordinis proxime inferioris. Quare hyperbolæ, quæ ſub quolibet ex recenſitis caſibus continentur, ſubdividendæ ſunt rurſus in eas, quæ diame-

tros

tros ordinis proxime inferioris admittunt, & in illas, quæ harum diametrorum ſunt expartes. Quumque ex hujuſcemodi diametris dari poſſint plures in nonnullis hyperbolis, & pauciores in aliis; a numero ipſarum novam adhuc priores hyperbolæ ſubdiviſionem patiuntur.

973. Ubi porro hyperbolæ aſymptotos habent parallelas, fiat ſecundo, ut linea ordinatarum evadat eis æquidiſtans. Et quoniam mutatione iſta incognita, referens ordinatam, amittet in æquatione tot dimenſiones, quotus eſt numerus aſymptotorum æquidiſtantium; fieri quandoque poteſt, ut relate ad eaſdem ordinatas detur diameter ejus quidem ordinis, quem oſtendit numerus dimenſionum, quæ ſuperſunt, unitate minutus. Quocirca hyperbolæ, quæ aſymptotis æquidiſtantibus ſunt præditæ, ſubdividi ulterius debent in eas, quæ talem diametrum admittunt, & in illas, quæ ab hujuſcemodi diametris ſunt immunes. Quia vero talis diameter nonniſi unica eſſe poteſt; ratione ejus priores hyperbolæ nequeunt ulteriorem ſubire diviſionem.

974. Inſtitutis in hyperbolis puris omnibus hiſce diviſionibus, jam ad infima earum genera deventum erit. Unde non aliud ſupereſt, quam ut ſpecies indiviſibiles percurrantur, quæ ſub quolibet horum generum continentur. Ratio autem eas diſtinguendi huc ſane redit, ut, comparata æquatione, quæ ſit propria ejus generis, de quo agitur, ponatur, ut in ea incognita, referens ordinatam, mox habeat omnes radices æquales, mox una pauciores, mox duabus adhuc pauciores, atque ita deinceps. Nam, determi-

minatis abſciſſis, quibus hujuſmodi ordinatæ correſpondent, licebit per variationes, quas ſubire poſſunt iſtiuſmodi abſciſſæ, definire omnes diverſitates, quæ dari poſſunt in punctis, ad quæ eædem ordinatæ terminantur. Plane vero per haſce diverſitates, tum quæſitæ ſpecies diſtinguentur, cum propria cujuſque ſpeciei forma, ſeu configuratio fiet nobis comperta, ac explorata.

975. Huc autem pertinet theoria punctorum irregularium, a nobis ſuperius tradita. Nam ordinata, quæ plures habet valores æquales, ad punctum aliquod irregulare jugiter debet terminari: niſi forte duobus tantum valoribus æqualibus ſit prædita, eademque correſpondeat abſciſſæ, unicum dumtaxat valorem habenti: in quo caſu terminatur quidem ad punctum regulare, ſed lineæ tangens evadit: adeo, ut etiam in iſto caſu, non tam in uno puncto, quam in duobus, ſimul coeuntibus, lineam ibidem ſecare cenſenda ſit. Quare, ſicuti puncta irregularia multiplicis ſpeciei eſſe poſsunt, ſic a diverſitate horum punctorum repetenda eſt diverſitas ſpecierum, quæ ſub quolibet hyperbolarum genere continentur.

976. Hac ratione, ſi ordinata duos tantum habeat valores æquales, ea, quemadmodum contingit lineam in puncto regulari, quum correſpondet abſciſſæ, unicum dumtaxat valorem habenti; ita, ſi referatur ad abſciſſam, cujus duplex quoque ſit valor, terminabitur, vel ad interſectionem duorum crurum, ſi eadem ordinata in curſu ſuo maneat ex utroque latere realis; vel ad punctum regreſſus primi generis, ſitum

in

in ipſa linea, ſi ex uno latere maneat realis, & ex altero evadat imaginaria; vel denique ad punctum regreſſus ejuſdem generis, ſejunctum ab ipſa linea, ſi fiat imaginaria, tum ab uno, cum ab alio latere. Fieri autem poteſt, ut duo ii valores abſciſſæ evadant imaginarii; & quum id contingit, argumento nobis eſſe debet, falſum eſse, ordinatam eo in loco duos habere valores æquales.

977. Quod ſi ordinata habeat quidem duos dumtaxat valores æquales, ſed eadem correſpondeat abſciſſæ, cujus valor ſit triplex; tunc ſemper terminabitur ad punctum regreſſus primi generis, ſitum in ipſa linea. Verum in hoc caſu recta, quæ ducitur per terminum ordinatæ æquidiſtanter lineæ abſciſſarum, fiet in loco illo tangens ipſius lineæ; quod minime obtinet, quum ejus abſciſſæ duplex tantum eſt valor. Nam punctum regreſſus primi generis eſt punctum duplex. Unde recta, quæ in eo puncto lineam contingit, cenſenda eſt quidem ſecare ibidem lineam in tribus punctis; ſed omnis alia recta, quæ ducitur per idem punctum, nonniſi in duobus punctis eodem in loco lineam ſecare cenſenda eſt.

978. Pone nunc, ordinatam tres habere valores æquales. Jamque, ſi ea correſpondet abſciſſæ, unicum valorem habenti, continget lineam in puncto irregulari, quod erit progreſſus primi generis. Sed, ſi valor abſciſſæ ſit duplex, tunc fiet tangens lineæ in puncto irregulari, quod erit regreſſus primi generis. Et denique, ſi ipſa etiam abſciſſa tres habeat valores æquales; tunc terminabitur, vel ad interſectionem

nem

nam trium crurum, ſi tres illi ordinatæ valores maneant ex utroque latere reales; vel ad punctum regreſſus ſecundi generis, ſi duo ex iis valoribus fiant ex utroque latere imaginarii; vel demum ad interſectionem duorum crurum, quorum alterum habeat ibidem punctum regreſſus generis primi, ſi eorum valorum omnes maneant reales ex uno latere, & duo fiant imaginarii ex latere alio.

979. Non diſſimiliter pergere licebit in infinitum, & pro multiplicitate valorum æqualium, quos ſubit, tum ipſa ordinata, cum abſciſſa, cui ea correſpondet, definire indolem puncti irregularis, ad quod ordinata illa terminatur. Plane vero, ut dictum eſt *, ſpecies hyperbolarum, quæ ſub quolibet ex recenſitis generibus continentur, diſtinguendæ ſunt a ſe invicem pro varia indole punctorum irregularium, quæ in iis occurrunt. Et profecto, ſicuti illiuſmodi puncta irregularia haberi debent velut charactere ipſarum ſpecierum; ita ex qualitate eorundem punctorum facile quoque erit, propriam cujuſque ſpeciei formam, ſeu configurationem eruere. * art. 975.

V. Subdiviſiones, quæ inſtitui debent in aliis linearum claſſibus.

980. POſt hyperbolas puras, ſequuntur hyperbolæ parabolicæ, quæ cruribus conſtant, partim hyperbolicis, & partim parabolicis. Hujuſmodi hyperbolæ ſubeunt primam ſubdiviſionem a numero crurum parabolicorum, quæ una cum hyperbolicis conjunguntur. Plane enim fieri nequit, ut unum tantum-

tummmodo crus parabolicum cum aliis hyperbolicis miſceatur. Nam ejus æquationis, quam præbet prior terminus æquationis datæ, nihilo æquatus, non aliæ radices ad crura nos ducunt parabolica, quam quæ in eadem æquatione alias ſibi habent æquales. Sed nihil interim obſtat, quominus pro ratione ordinis, ad quem hyperbola refertur, crura parabolica, modo ſint duo, modo tria, modo etiam plura. Itaque a numero horum crurum repetenda eſt prima ſubdiviſio, quæ locum habet in hyperbolis parabolicis.

981. Secunda earundem hyperbolarum ſubdiviſio eruenda eſt ex aſymptotis crurum hyperbolicorum. Quum autem in hiſce hyperbolis non omnia crura ſint hyperbolica; nihil vetat, quin omnes ipſarum aſymptoti ſint ſibi mutuo æquidiſtantes. Itaque ex hoc capite tres caſus ſunt diſtinguendi; primus eſt, quum omnes aſymptoti ſibi invicem æquidiſtant; ſecundus eſt, quum inter eas aliquæ tantum dantur parallelæ; tertius denique eſt, quum omnes aſymptoti ſibi mutuo occurrunt. Verum, ſicuti, quum dantur aſymptoti parallelæ, fieri poteſt, ut duæ, aut plures ipſarum coincidant in unum, & nonniſi unicam aſymptotum exhibeant; ita, quum dantur aſymptoti concurrentes, fieri optime poteſt, ut omnes ad unum idemque punctum convergant.

982. Tertia ſubdiviſio deducenda eſt ex diametris ordinum inferiorum, quæ dari quandoque poſſunt in hujuſmodi hyperbolis parabolicis. Jam enim, faciendo, ut linea ordinatarum mutetur in aliam, quæ alicui ex aſymptotis ſit parallela; una, aut plures interſectionum

cu-

cujuſque ordinatæ cum hyperbola abeunt in infinitum. Itaque ipſa etiam incognita, referens ordinatam, amittet in æquatione unam, aut plures dimenſiones: & propterea, relate ad eaſdem ordinatas, dari poterit diameter ejus quidem ordinis, quem oſtendit numerus dimenſionum, quæ ſuperſunt, unitate una minutus. Quocirca, tum a numero, cum a qualitate harum diametrorum repetenda eſt tertia ſubdiviſio, quæ locum habet in hyperbolis parabolicis.

983. Tribus hiſce ſubdiviſionibus jam inſima genera hyperbolarum parabolicarum nobis ſuboriuntur. Remanent ergo ſpecies indiviſibiles, quæ ſub unoquoque eorum generum continentur. Iſtas autem comparare licebit eodem plane artificio, quod in diſtinguendis ſpeciebus, quæ ad unumquodque genus purarum hyperbolarum referuntur, adhibendum eſſe docuimus: nimirum ponendo, ut in ea æquatione, quæ eſt propria ejus generis, de quo agitur, incognita, referens ordinatam, modò habeat omnes radices æquales, modo una pauciores, modo duabus adhuc pauciores, atque ita deinceps. Nam, pro multiplicitate valorum æqualium, quos in variis locis ſubit, tum ipſa ordinata, cum abſciſſa, ei correſpondens, definientur, tam puncta irregularia, quæ adſunt in locis illis, quam ſpecies ipſarum hyperbolarum.

984. Hyperbolas parabolicas excipiunt hyperbolæ ellipticæ, quarum crura ſunt partim hyperbolica, partim elliptica. In his, perinde ac in hyperbolis parabolicis, tres etiam ſubdiviſiones locum habent. Prima namque repetenda eſt a numero crurum ellipticorum, quæ cum cruri-

bus hyperbolicis conjunguntur. Secunda a poſitione aſymptotorum, quibus prædita ſunt crura hyperbolica. Et tertia demum a numero, & qualitate diametrorum inferioris ordinis, quæ in iis dari queunt. Quemadmodum vero hiſce ſubdiviſionibus infima genera iſtarum hyperbolarum comparantur; ita ſpecies indiviſibiles, quæ ſub unoquoque genere continentur, eodem adhuc artificio licebit a ſe mutuo diſtinguere.

985. Quantum ad hyperbolas parabolico-ellipticas, quemadmodum in iis crura ſunt partim hyperbolica, partim parabolica, & partim elliptica; ita prima earundem ſubdiviſio eruenda eſt ex numero, tam crurum parabolicorum, quam crurum ellipticorum, quæ conjunguntur cum cruribus hyperbolicis. Huic porro ſubnectenda eſt ea, quam præbet poſitio aſymptotorum, quibus referta ſunt crura hyperbolica. Denique inſtituenda eſt illa, quæ pendet ex numero, & qualitate diametrorum inferioris ordinis, quæ in iis dari queunt. Tribus hiſce ſubdiviſionibus genera infima harum hyperbolarum nobis ſubnaſcuntur. Cujuſque vero generis ſpecies indiviſibiles habebuntur eadem plane methodo, quam in præcedentibus hyperbolarum claſſibus adhibendam eſſe docuimus.

986. Sequuntur parabolæ puræ, quarum crura omnia ſunt parabolica. In iis prima ſubdiviſio a directione crurum eſt repetenda. Nam, vel omnia tendunt ad unam, eandemque plagam; vel quædam diriguntur ad plagam unam, quædam ad aliam, & alia rurſus ad aliam. Primum contingit, quum ejus æquationis, quam præbet prior terminus æquationis datæ, nihilo æqua-

quatus, radices omnes uni, eidemque magnitudini ſunt æquales. Alterum accidit, quum ex iſdem radicibus nonnullæ unam, aliæ aliam, & aliæ rurſus magnitudinem alteram adæquant. Unde ſecundus caſus, pro numero directionum diverſarum, quæ dari poſſunt in cruribus parabolicis, adhuc in plures alios ſubdividi debet.

987. Fiat porro, ut linea ordinatarum tendat ad eam plagam, verſus quam diriguntur, vel omnia crura parabolica, vel aliqua eorum. Et, quemadmodum mutatione iſta fieri poteſt, ut ex interſectionibus cujuſque ordinatæ cum parabola, modo una, modo duæ, modo etiam plures abeant in infinitum; ita incognita, referens ordinatam, amittet in æquatione, modo unam, modo duas, modo plures quoque dimenſiones. Quocirca altera ſubdiviſio, quæ locum habet in parabolis puris, ex numero dimenſionum, quæ amittuntur, erit eruenda.

988. Quemadmodum autem, efficiendo, ut ordinatæ tendant ad eam plagam, verſus quam diriguntur, vel omnia crura parabolica, vel aliqua eorum, incognita, referens ordinatam, amittit in æquatione unam, aut plures dimenſiones; ita, relate ad haſce ordinatas, dari poterit diameter ejus quidem ordinis, quem oſtendit numerus dimenſionum, quæ ſuperſunt, unitate minutus. Quare tertia ſubdiviſio, quæ obtinet in parabolis puris, repetenda erit a numero, & qualitate diametrorum inferioris ordinis, quæ dari poſſunt in iis. Ea vero inſtituta, jam ad infima purarum parabolarum genera deventum erit, quorum ſpecies indiviſibiles eadem ſemper methodo comparare licebit.

989. Parabolis puris proximæ ſunt parabolæ ellipticæ, quæ cruribus conſtant, partim parabolicis, partim ellipticis. Hujuſmodi parabolæ ſubeunt primam ſubdiviſionem a numero crurum ellipticorum, quæ cum cruribus parabolicis conjunguntur. Ea autem inſtituta, ſubjiciendæ ſunt tres aliæ illæ, quæ locum habent in parabolis puris; una deſumenda a numero directionum diverſarum, quas habere poſſunt crura parabolica; altera eruenda ex numero dimenſionum, quas incognita, referens ordinatam, amittit in æquatione, ubi ordinatæ ad plagam crurum ducuntur; & poſtrema repetenda a numero, & qualitate diametrorum inferioris ordinis, quæ in iis dari queunt. Quum vero hiſce ſubdiviſionibus ad infima harum parabolarum genera deveniatur; non aliud ſupereſt, quam ut eodem ſemper artificio ſpecies indiviſibiles cujuſque generis percurrantur.

990. Remanent puræ ellipſes, in quibus crura omnia ſunt elliptica, ſive alicubi ſiſtuntur, ac terminantur. In iis, ratione crurum, nulla ſubdiviſio inſtitui poteſt, quum nullum inter ea diſcrimen occurrat. Quia vero ad quamcumque plagam dirigantur ordinatæ, numquam fieri poteſt, ut incognita, referens ordinatam, amittat in æquatione aliquam ſuarum dimenſionum; nec item ex hoc capite erui poterit ſubdiviſio ulla. Quumque, ob eandem rationem, nec etiam dari poſſint in iis diametri ordinum inferiorum; hæc pariter ſubdiviſio a puris ellipſibus procul eſſe debet. Unde reliquum eſt, ut ipſarum unicum tantum genus agnoſcamus, cujus ſpecies indiviſibiles habebuntur eodem

adhuc

dhuc artificio, quod in aliis linearum claſſibus dhibendum eſſe decrevimus.

991. Cæterum, ſicuti ad eandem plagam endi poſſunt, tam plura crura parabolica, quam lura crura hyperbolica; ita in inſtituendis ſubdiiſionibus, quæ locum habent in ſingulis liearum claſſibus, iſtud aſſumpſimus: quod, faiendo, ut ordinatæ ſubeant directionem coum, omnino neceſſe ſit, ut, relate ad crura hyerbolica, abeant in infinitum tot præciſæ interectiones earum ordinátarum cum linea ipſa, uot ſunt illiuſmodi crura; ſed non item, relate d crura parabolica, quum reſpectu iſtorum nunerus interſectionum, in infinitum abeuntium, ninor ſemper eſſe debeat. Id vero, velut prorſus nemorabile, mirum fortaſſe videri poterit: roindeque, unde ejus ratio ſit repetenda, non bs re erit, hic paucis indicare.

992. Nimirum, quum crura hyperbolica endunt ad eandem plagam, id accidit, quia aſymptotis æquidiſtantibus ſunt prædita. Unde, quum crura illa ad ſuas aſymptotos continuo ccedant; plane neceſſe eſt, ut eadem crura finito ſemper intervallo a ſe invicem diſtent. Vidimus autem ſupra *, in infinita diſtantia punctum multiplex haberi poſſe, non modo per omnimodam ſuperimpoſitionem arcuum evaneſcentium, verum etiam quum ii ad finitum intervallum accedunt. Quare hyperbolica illa crura in infinita diſtantia exhibebunt punctum ſubinde multiplex, ut numero crurum correſpondeat; & propterea recta, per illud tranſiens, in punctis totidem lineam ſecare cenſenda eſt. *art. 965.

993. Quotieſcumque vero crura ſunt pa-

rabolica, & tendunt ad eandem plagam; eorum tangentes in infinita diſtantia fiunt quidem inter ſe mutuo parallelæ. Verum, ſicuti iſtæ, ob indolem crurum parabolicorum, abeunt in infinitum, nec ullibi reperiuntur; ita in infinita illa diſtantia debent, vel omnes, vel aliquæ ipſarum infinito itidem intervallo a ſe invicem diſtare. Unde, quum talis etiam evadat mutua, ſive omnium, ſive aliquorum ex cruribus illis diſtantia; hæc in infinitum non conſtituent punctum ſubinde multiplex, ut numero crurum correſpondeat: proindeque recta, quæ ſubit directionem ipſorum, procul eſt, ut in infinita diſtantia cenſeri poſſit in punctis totidem lineam ſecare.

VI. *Quomodo fieri poſſit, ut ordinatæ tendant ad plagam cruris infiniti.*

994. Vidimus, qua ratione inſtituendæ ſint ſubdiviſiones in ſingulis claſſibus linearum, quæ ſub dato aliquo ordine continentur. Quia vero pro iis, in quibus crura dantur, in infinitum abeuntia, efficiendum eſt, ut ordinatæ tendant ad plagam unius ex cruribus iſtis; qua ratione id fieri poſſit, nunc breviter oſtendemus. Et quidem plaga cruris, in infinitum abeuntis, eſt eadem ac rectæ, quæ illud contingit in infinita diſtantia. Quare tendent ordinatæ ad plagam cruris infiniti, mutando lineam ordinatarum in aliam, quæ ſit parallela tangenti, ubi punctum contactus in infinitum abire ſupponitur.

995. Jam, ſcribendo in æquatione lineæ rz loco y, & $x + sz$ loco x, mutatur * linea or-

*art. 692.

dinatarum AC in aliam Ab, utcumque priori inclinatam. Unde eo res redit, ut inquiramus, qualis eſſe debeat ratio ipſius r ad s, hoc eſt Ae ad de, quo nova hæc linea ordinatarum fiat parallela rectæ, quæ lineam tangit in infinita diſtantia. Hunc in finem referat FG tangentem iſtam, quæ conveniat, in F quidem cum linea abſciſſarum AB, in G vero cum priore linea ordinatarum AC. Et quoniam, ubi duæ Ab, FG inter ſe ſunt parallelæ, triangula Ade, GAF æquiangula fiunt; erit, ut Ae ad de, ita AG ad AF. FIG. 73.

996. Hinc, ſicuti ratio, quam habet AG ad AF, definienda eſt * per radices reales ejus æquationis, quam præbet prior terminus æquationis datæ, nihilo æquatus; ita per eaſdem radices determinanda eſt pariter ratio, quam habet Ae ad de, ſive r ad s. Unde, quid factu ſit opus, quo tendant ordinatæ ad plagam unius ex cruribus, quæ in infinitum extenduntur, facile erit intelligere: nimirum primo ponendus eſt nihilo æqualis prior terminus datæ æquationis; deinde fractio $r:s$ conſtituenda eſt æqualis uni ex radicibus realibus æquationis, quæ exinde oritur; ac denique transformanda eſt æquatio data, ſcribendo rz loco y, & $u + sz$ loco x. * art. 941

997. Ut, ſi linea ſit ſecundi ordinis, exhiberi ea poteſt per æquationem iſtam generalem $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Plane vero, ſicuti $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$ eſt æquatio, quam præbet prior terminus ejus, nihilo æquatus; ita, ſi duæ hujus æquationis radices ſint reales, duo lineæ crura in infinitum abibunt. Quocirca, ſi fractio $r:s$ conſtituatur æqualis uni earum radicum, tum deinde transformetur æquatio

lineæ, ſcribendo rz loco y, & $u + sz$ loco x; tendent novæ ordinatæ ad plagam unius ex cruribus illis infinitis.

998. Similiter, ſi æquatio ſit tertii ordinis, repræſentari ea poteſt per æquationem iſtam generalem $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$. Ponendo autem priorem ejus terminum nihilo æqualem, ſuboritur æquatio $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$, quæ unam ſaltem radicem realem continebit. Fiat ergo, ut fractio $r : s$ realem illam radicem adæquet. Jamque, ſi lineæ æquatio transformetur, ſcibendo rz loco y, & $u + sz$ loco x; ad plagam cruris infiniti ordinatæ novæ dirigentur.

999. Et ſane, quum ordinatæ tendunt ad plagam cruris infiniti, omnino neceſſe eſt, ut abeat in infinitum interſectio una cujuſque ordinatæ. Quare, ut id habeatur, ipſius $r : s$ talem oportet eſſe valorem, ut, ſcribendo in æquatione lineæ rz loco y, & $u + sz$ loco x, amittat ordinata ipſa in nova æquatione dimenſionem unam. Unde, quum terminum illum, in quo maxima ordinatæ poteſtas continetur, in nihilum abire neceſſe ſit; licebit, traditæ methodi veritatem alia etiam ratione comprobare.

1000. Si enim in æquatione linearum ſecundi ordinis $ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ ſcribatur rz loco y, & $u + sz$ loco x; habebitur loco ejus hæc alia $(er^2 + frs + gs^2)z^2 + (fr + 2gs)uz + gu^2 + (hr + is)z + iu + k = 0$. Plane vero in æquatione iſta non aliter abire poteſt in nihilum terminus, in quo maxima ordinatæ poteſtas continetur, niſi fuerit $er^2 + frs + gs^2 = 0$. Itaque, ut illud contingat, neceſſe eſt, ut

valor ipſius $r:s$ eruatur ex æquatione $er^2 + frs + gs^2 = 0$: quæ ſane eſt ejuſdem formæ cum ipſa $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$.

1001. Similiter, ſi in æquatione linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$ ponatur rz loco y, & $u + sz$ loco x; mutabitur ea in hanc aliam $(ar^3 + bsr^2 + cs^2r + ds^3)z^3 + (br^2 + 2crs + 3ds^2)uz^2 + (cr + 3ds)u^2z + du^3 + (er^2 + frs + gs^2)z^2 + (fr + 2gs)uz + gu^2 + (hr + is)z + iu + k = 0$. Ut autem in iſta evaneſcat terminus, in quo z^3 continetur, neceſſe eſt, ut ſit $ar^3 + bsr^2 + cs^2r + ds^3 = 0$. Quare, quo ei fiat locus, ex hac æquatione eruendus eſt valor ipſius $r:s$: cui quidem conſimilis eſt æquatio $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = 0$.

1002. Quum igitur fractio $r:s$ ponitur æqualis uni ex radicibus realibus ejus æquationis, quam præbet prior terminus æquationis datæ, nihilo æquatus; tunc, ſcribendo rz loco y, & $u + sz$ loco x, ſemper quidem evaneſcere debet in nova æquatione terminus ille, in quo maxima ordinatæ poteſtas continetur. Verum hac occaſione non eſt hoc loco reticendum, quod, ſi radix illa in ea æquatione aliam ſibi habeat æqualem; tunc evaneſcere etiam debet ille terminus, in quo poteſtas ordinatæ, uno gradu inferior, per abſciſſam multiplicata reperitur.

1003. Ita, quum æquatio eſt $y^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, ſcribendo rz loco y, & $u + sz$ loco x, vertitur ea in hanc aliam $(er^2 + fsr + gs^2)z^2 + (fr + 2gs)uz + gu^2 + (hr + is)z + k = 0$. Ut autem eſt $er^2 + fsr + gs^2$ coefficiens ipſius z^2, ita eſt $fr + 2gs$ coefficiens

ipſius

ipſius uz. Plane vero, quum in æquatione $er^2 + frs + gs^2 = 0$ duæ adſunt radices æquales; tunc eſſe debet etiam $fr + 2gs = 0$. Quare, abeunte in nihilum termino, in quo z^2 continetur; etiam illum, in quo uz reperitur, in nihilum abire, neceſſe eſt.

1004. Eadem ratione, quum æquatio eſt $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, ponendo rz loco y, & $u + sz$ loco x, mutatur ea in hanc aliam $(ar^3 + bsr^2 + cs^2r + ds^3) z^3 + (br^2 + 2crs + 3ds^2) uz^2 + (cr + 3ds) u^2z + du^3 + (er^2 + frs + gs^2) z^2 + (fr + 2gs) uz + gu^2 + (hr + is) z + iu + k = 0$. Unde erit $ar^3 + bsr^2 + cs^2r + ds^3$ coefficiens ipſius z^3, & $br^2 + 2crs + 3ds^2$ coefficiens ipſius uz^2. Quumque, exiſtentibus in æquatione $ar^3 + bsr^2 + cs^2r + ds^3 = 0$ duabus radicibus æqualibus, fiat etiam $br^2 + 2crs + 3ds^2 = 0$; liquet utique propoſitum.

1005. Quod ſi radix illa realis in ea æquatione duas alias ſibi habeat æquales; tunc abibit etiam in nihilum terminus ille, in quo poteſtas ordinatæ, uno adhuc gradu inferior, per quadratum abſciſſæ multiplicata reperitur. Sic in præcedenti exemplo coefficiens ipſius uz^2 eſt $cr + 3ds$. Et quoniam, quum in æquatione $ar^3 + bsr^2 + cs^2r + ds^3 = 0$ tres adſunt radices æquales, fieri debet, tum $br^2 + 2csr + 3ds^2 = 0$, cum $cr + 3ds = 0$; abeunte in nihilum termino, in quo z^3 continetur, delebuntur ſimul duo illi, in quibus uz^2, & u^2z reperiuntur.

1006. Hæc autem theoria in infinitum extenditur. Unde generaliter ſic ſtatui poteſt, quod, ſi numerus m referat, tum ordinem lineæ,

da

de qua agitur, cum gradum ſuæ æquationis, & in ea æquatione, quam præbet prior ejus terminus, nihilo æquatus, plures dentur radices æquales: quod, inquam, aſſumendo fractionem $r:s$ uni earum radicum æqualem, & ſcribendo in data lineæ æquatione rz loco y, & $u+sz$ loco x, ſemper in nova æquatione abire debeant gradatim in nihilum tot ex iis terminis, in quibus continentur z^m, uz^{m-1}, u^2z^{m-2}, u^3z^{m-3}, &c. quotus eſt numerus earum radicum æqualium.

1107. Iſti porro termini continent ejus, quod incognitum eſt, maximum dimenſionum numerum; adeoq; omnes ſimul conſtituunt priorem terminum æquationis, ubi relate ad utramque incognitam ordinatur. Sed in iis, qui conſtituunt terminum ſecundum, & in quibus continentur z^{m-1}, uz^{m-2}, u^2z^{m-3}, u^3z^{m-4}, &c. ſimile quidpiam obſervare licet. Nam, ſi ea radix, cui ponitur æqualis fractio $r:s$, occurrat in æquatione, quam præbet ſecundus terminus datæ æquationis, nihilo æquatus; ſcribendo rz loco y, & $u+sz$ loco x, abibunt gradatim in nihilum tot ſemper ex terminis illis, quotus eſt numerus vicium, quibus in altera illa æquatione ea radix occurrit.

1008. Eadem autem ratione, ſi eadem illa radix reperiatur quoque in æquatione, quæ oritur, ponendo nihilo æqualem tertium terminum datæ æquationis; ſcribendo rz loco y, & $u+sz$ loco x, neceſſe eſt, ut gradatim abeant in nihilum tot ſemper ex iis terminis, in quibus continentur z^{m-2}, uz^{m-3}, u^2z^{m-4}, u^3z^{m-5}, &c. quot vicibus in tertia illa æquatione ea radix reperitur. Neque aliter ſe res habebit, ſi con-

tin-

tingat, ut illa eadem radix exiſtat etiam in æquationibus, quæ ex terminis aliis datæ æquationis, nihilo æquatis, derivantur. Nam ſemper delebuntur in nova æquatione homologi termini totidem, quot vicibus ea radix in iis occurrit.

1009. Quæ quum ita ſint, facile modo erit, definire numerum interſectionum, quæ abire debent in infinitum, quum ordinatæ tendunt ad plagam crurum parabolicorum. Ita in generali æquatione linearum tertii ordinis $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, ſi prior terminus $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3$ ponatur nihilo æqualis, & in ſuborta æquatione dentur tres radices æquales;
Part. 960. fient * parabolica omnia tria crura, ubi earum radicum æqualium, vel nulla, vel duæ occurrunt in æquatione $ey^2 + fxy + gx^2 = 0$, quam præbet ſecundus terminus, nihilo æquatus. Unde per ea, quæ modo obſervavimus, faciendo, ut ordinatæ tendant ad plagam illorum crurum, abibunt in infinitum, unica tantum interſectio in primo caſu, & interſectiones duæ in caſu ſecundo.

VII. *Nam in recenſendis ſpeciebus linearum centri ratio ſit habenda.*

1010. Differentiis iis, quas in ſingulis linearum claſſibus adnotavimus, non modo infima genera linearum, quæ ſub qualibet claſſe continentur, verum etiam ſpecies indiviſibiles, quas quodlibet eorum generum ſub ſe complectitur, oriri diximus. Interim Newtonus in enumerandis ſpeciebus linearum tertii ordinis, præter eas differentias, aliam adhuc

adhuc ad calculum revocavit : nempe, quod quædam ſint refertæ centro primi generis, hoc eſt ſimili ei, quod conicæ ſubeunt ſectiones; aliæ vero non item. Unde, ejus exemplo, nec etiam a nobis prætereunda erat hujuſmodi differentia: eoque magis, quod ipſæ lineæ videntur aliam ſubire formam, quum tali centro ſunt præditæ; & aliam, quum eo ſunt deſtitutæ.

1011. Et ſane vidimus ſupra *, quod, ſicuti lineæ, præter eas diametros, quæ ſunt ſui ordinis propriæ, alias etiam habere poſſunt, quæ ad aliquem inferiorum ordinum pertineant; ſic pariter dari poſſit in iis, tum centrum, quod ipſarum exigit ordo, cum centrum, quod ſit generis alicujus inferioris. Itaque, ſi diametri inferioris ordinis, quas lineæ ſubire queunt, ad calculum ſunt revocandæ, quum de diſtinguendis ipſarum ſpeciebus agitur; æquum eſt, ut ſimiliter centra inferiorum generum, quibus lineæ poſſunt eſſe præditæ, ſub contemplationem veniant, ubi earum ſpecies accurate a ſe invicem ſunt diſtinguendæ. *art.792.

1012. Non equidem negamus, id rationi maxime conſonum videri. Verum, ſi vitio nobis vertendum ſit, quod hujuſmodi differentiam neglexerimus; nec item culpa vacat eximius Newtonus, quod illam non ea, qua par erat, ratione ad calculum revocaverit. Namque, ſi ejus ratio haberi velit, ſic ſane calculo oportet ſubjiciatur; ut primo quidem dividendæ ſint lineæ in eas, quæ centro ſunt refertæ, illaſque, quæ centro ſunt deſtitutæ; tum vero lineæ, centrum ſubeuntes, ſubdividendæ ſint adhuc, pro indole, ac qualitate ipſius, quod ſubeunt, centri. Ne-

que

* art. 1011 que enim eam, quam modo * inſtituimus, inter diametros, & centra comparationem omnibus numeris perfectam, abſolutamque eſſe putandum eſt.

1013. Nam primo quælibet linea infinitas habet diametros, quæ ſunt ſui ordinis propriæ; quum tamen linea quævis, tantum abeſt, ut plura ſubeat centra ejus generis, quod ordo lineæ exigit, ut interdum ſit prorſus eo deſtituta. Et deinde, ubi aliqua linea diametros ſuſcipit ordinis inferioris, adhuc referta manet infinitis iis diametris, quæ ſuo ordini correſpondent; verum, ſi quæ eſt linea, centro inferioris generis prædita, ea omnino deſtituta ſit oportet centro illo, quod ſuus ordo requirit; quia,
* art. 792. ut ſuperius * obſervavimus, illud idem centrum, quod gradui lineæ conſonum eſt, in genus abit inferius.

1014. Itaque, quum in enumerandis ſpeciebus linearum tertii ordinis placuerit Viro ſummo Newtono, centri differentiam adhibere, ab eo erant ſedulo diſtinguendæ, non modo eæ omnes ſpecies, quæ centro primi generis ſunt præditæ, verum etiam ſpecies illæ omnes, quæ centrum ſubeunt ſecundi generis, quod tertio linearum ordini proprie competit. Id vero Vir ſummus nequaquam præſtitit. Nam hyperbolæ ellipticæ, ſeu defectivæ, quemadmodum ſuo loco oſtendemus, poſſunt quandoque centrum ſecundi generis admittere: quas tamen non ſejunxit ab iis, quæ tali centro ſunt deſtitutæ. Et licet in iis hyperbolis puris, quas ipſe vocat redundantes, aliæ ab aliis ſejunctæ videantur; id tamen contigit, quia ſubeunt ejuſcemodi centrum omnes illæ hyperbolæ puræ, quæ

aſym-

aſymptotos habent, ad unum idemque punctum convergentes.

1015. Neque vero difficile erit conjicere, unde factum, ut Vir clariſſimus in id animum non intenderit: nimirum, quia indolem, ac naturam centri ſecundi generis plane non novit. Ut enim vidimus ſupra *, centri ejus accurata notio hæc eſt, ut non modo in eo concurrant diametri omnes, quæ ſunt propriæ linearum tertii ordinis; verum etiam, ut omnes rectæ, per illud tranſeuntes, & lineæ occurrentes in tribus punctis, ita ab eo dividantur, ut ſumma duorum ſegmentorum, ad unum latus exiſtentium, adæquet ſegmentum tertium, quod in latere altero reperitur. Quamquam vero poſtremum iſtud ex priore prono alveo fluat, audacter tamen aſſerimus, id plane Newtonum latuiſſe; quandoquidem, velut prorſus memorabile, non erat ab eo reticendum, ubi linearum tertii ordinis præcipuarum proprietatum cenſum inſtituit. *art.791.

1016. Etſi autem Newtono vitio vertendum ſit, quod in recenſendis ſpeciebus linearum tertii ordinis reſpexerit quidem ad centrum primi generis, ſed non item ad illud, quod eſt generis ſecundi, & quod earum linearum eſt proprium; culpæ tamen non debet nobis adſcribi, quod centri differentiam in conſtitutione ſpecierum omnino neglexerimus. Neque enim ullam ejus rationem habendam eſſe arbitramur, ubi quæſtio eſt, de diſtinguendis a ſe invicem ſpeciebus, quæ ſub quolibet linearum ordine continentur; quandoquidem id, quod ad lineæ naturam, ac indolem pertinet, ea ſola mutare non

valet. Et, ſi aliquam interdum mutationem in-ducere videatur; hujuſmodi mutatio, non tam ei differentiæ, quam alteri ex ſuperius recenſitis, cui ipſa adjungitur, ferri debet accepta.

1017. Jam enim, ubi quilibet ordo linearum in ſuas claſſes eſt diſtributus, & quælibet claſſis uſque adeo eſt dirempta, ut ad infima ejus genera deventum ſit, conſtituendæ ſunt ſpecies, quæ ſub quolibet eorum generum continentur. Plane autem, ſicuti nulli dubium eſſe poteſt, quin per eas ſubdiviſiones, quas ſupra indicavimus, ad ultima cujuſque claſſis genera deveniatur; ita rationi maxime conſonum eſt, ut ſpecierum cujuſque generis charaćteres ſint puncta irregularia, quæ in iis occurrunt. Quare id tantum in ſpecierum conſtitutione ſub contemplationem veniat, neceſſe eſt, per quod eorum punctorum natura, ac indoles mutatur: & propterea, quia tale quidpiam ſola centri differentia præſtare non poteſt, eam in ſpecierum conſtitutione, æquum eſt, omnino negligere.

1018. Verum ſedulo notetur hic velim, quod centri differentiam tunc tantum negligendam eſſe cenſemus, quum agitur de conſtitutione ipſarum ſpecierum. Iis autem conſtitutis, ubi in propriam cujuſque ſpeciei naturam, ac indolem inquirimus, omnino neceſſarium judicamus, in eam animum intendere; &, ſi quæ alia cuique ſpeciei accidere poſſunt, qualia forte non deerunt, hæc pariter ſedulo erunt advertenda. Quum vero his omnibus proprii ſpecierum characteres iidem maneant, ac immutati; mutationes, quas in ipſis ſpeciebus eadem inducent, tantum velut accidentales debent haberi:

proin-

proindeque, non novis ſpeciebus conſtituendis apta erunt, ſed tantum velut accidentia earum ſpecierum, quæ jam conſtitutæ ſunt, oportet habeantur.

VIII. *Corollarium theoriæ præcedentis, eademque plenius vindicata.*

1019. EX iis, quæ modo * dicta ſunt, illud prono alveo fluit, quod, etſi in lineis tertii ordinis, ubi tres aſymptoti in punctis totidem ſibi invicem occurrunt, & triangulum continent, tres hyperbolæ, ex quibus ipſa figura conſtat, poſſint quandoque ex angulis trianguli ad latera ejus tranſire, & tale quidpiam in lineis ſuperiorum ordinum etiam occurrat; id tamen in ſpeciebus conſtituendis minime ſub contemplationem veniat, neceſſe eſt, quum ratione ejus proprii ſpecierum characteres nullam mutationem patiantur. Unde, quum in recenſendis ſpeciebus linearum tertii ordinis ad hanc quoque differentiam Newtonus attenderit; nec item ex hoc capite a ſummo Viro deinceps recedere verebimur.

* ar. 1018

1020. Mirum interim cenſeri debet, quod Vir eximius reſpexerit quidem ad hanc differentiam, quum tres aſymptoti triangulum continent; ejus vero nullam rationem habuerit, quum ad unum, idemque punctum aſymptoti omnes convergunt. Sicuti enim in primo caſu fieri quandoque poteſt, ut tres hyperbolæ ex angulis trianguli tranſeant ad latera; ita etiam in ſecundo poteſt interdum evenire, ut eædem hyperbolæ ſuas mutent poſitiones. Itaque, ſi

tranſitus ille hyperbolarum ex angulis ad latera ad novas ſpecies conſtituendas eum adegerit; novæ etiam ſpecies conſtituendæ ab eodem erant, quum in ſecundo caſu poſitio hyperbolarum mutata deprehenditur.

1021. Nec ad rem facit, quod in ſecundo caſu, quæcumque ſit poſitio hyperbolarum, ſemper ſitus ipſarum eſt talis, ut jaceant in tribus ex angulis, quos mutuo occurſu aſymptoti conſtituunt. Nam primo id ipſum habetur etiam, quum tres aſymptoti triangulum continent. Etſi enim hyperbolæ ex angulis trianguli migrent ad latera; ſemper tamen in aliquibus ex angulis, quos occurſibus ſuis formant aſymptoti, jacere deprehenduntur. Et deinde, quod utrobique par eſſe debeat ratio, liquido patebit, ſi conſideremus, non aliunde quidem evenire, ut tres aſymptoti ad unum idemque punctum convergant, quam quia triangulum, quod continent, indefinite parvum evadit: hinc enim clare liquet, eandem eſſe legem mutationis in utroque caſu, adeoque eundem eſſe debere effectum utriuſque.

1022. Et ſane iſthæc ſitus mutatio obtinet etiam in hyperbola conica. Ubi enim in æquatione $y^2 = gx^2 + ix + k$, (ad quam facile revocare licet generalem linearum ſecundi ordinis æquationem,) adeſt terminus gx^2, idemque poſitivo ſigno affectus; ea non ad aliam lineam nos ducit, quam ad hyperbolam conicam. Si au-
FIG. 22. tem AN ſit linea abſciſſarum, & AH linea ordinatarum, determinabuntur binæ ejus aſymptoti, ſi, ſumpta ſuper AN portione $AC = -i : 2g$, fiat utraque ipſarum AE, AH $= i : 2\sqrt{g}$. Interim

rim binæ hyperbolæ oppoſitæ, ex quibus figura conſtat, non ſemper jacebunt intra angulos ECH, FCG; ſed fieri quandoque poteſt, ut ex iis migrent ad angulos ECF, HCG: nimirum, quum æquationis $gx^2 + ix + k = 0$ radices duæ ſunt imaginariæ.

1023. Hæc ſiquidem æquatio $gx^2 + ix + k = 0$ tunc quidem ſubſiſtit, quum valor ordinatæ y fit nullus. Itaque, ſemper ac duæ ejus radices ſunt imaginariæ; argumento id nobis erit, nullibi valorem ordinatæ poſſe evaneſcere. Unde binæ hyperbolæ oppoſitæ non poterunt locari intra angulos ECH, FCG; quia aliter in iis locis, in quibus eis linea abſciſſarum occurrit, evaneſceret valor ordinatæ: & propterea omnino neceſſe eſt, ut locentur intra angulos ECF, HCG; quia in ea ipſarum poſitione ſemper ordinata valorem aliquem habere reperietur. Et profecto, quum imaginariæ ſunt radices duæ æquationis $gx^2+ix+k=0$, ipſa etiam hyperbolarum diameter prodit imaginaria; adeoque per ea, quæ ſupra * monuimus, ad hyperbolas conjugatas nos ducere debet. *art. 499.

1024. Etſi autem illiuſmodi ſitus mutatio obtineat etiam in hyperbola conica; nemo tamen, ratione ejus mutationis, duas hyperbolæ conicæ ſpecies cenſuit eſſe diſtinguendas. Quare nec item ex hoc capite augendus eſt numerus ſpecierum in lineis ordinum ſuperiorum. Et quamquam caſus hyperbolæ conicæ ei in lineis tertii ordinis correſpondeat, in quo eam ſitus mutationem Newtonus omnino neglexit, hoc eſt, ubi tres aſymptoti ad unum idemque punctum convergunt; vidimus tamen paulo ante *, quod, *ar. 1012.

 ſi mu-

ſi mutatio illa negligenda ſit, ubi idem eſt concurſus trium aſymptotorum, nec item ulla cjus habenda eſt ratio, ubi tres aſymptoti triangulum continent, & in punctis totidem ſibi invicem occurrunt; quum eadem utrobique ſit lex mutationis.

1024. Cæterum, quum binæ illæ hyperbolæ conicæ ex angulis ECH, FCG migrant ad angulos ECF, HCG; tunc evadunt priorum conjugatæ: adeo nempe, ut conjugatæ diametrorum, quæ ad priores hyperbolas referuntur, non alibi, quam in iis, ſuos debeant terminos habere. Vidimus autem ſupra *, quod in lineis ordinum ſuperiorum, etſi non omnis diameter ſuam habeat conjugatam, nihil tamen vetat, quominus detur quandoque diameter aliqua, cui ſua competat conjugata. Hinc jucundum erit inquirere, num ea ſitus mutatione etiam in lineis ſuperiorum ordinum figuræ conjugatæ nobis ſuboriantur. Id vero ſequenti ſectione præſtabimus, in qua exhibenda eſt nobis linearum tertii ordinis theoria ſpecialis.

* art. 767.

1026. Interim hac occaſione non eſt hoc loco reticendum, quod, ſicuti diſtinctio centri in generale, & ſpeciale, quam inſtituit Newtonus, ubi linearum tertii ordinis potiſſimas proprietates recenſuit, non eſt improbanda; ita definitio centri ſpecialis paulo aliter cudenda videtur. Ut enim centrum generale concurſum vocavit diametrorum omnium; ita ſpecialis centri nomine concurſum duarum dumtaxat diametrorum nuncupavit. Hac autem definitione, ubi lineæ centro generali ſunt deſtitutæ, unaquæque diameter infinita habebit centra ſpecialia; quum

omnes

omnes aliæ diametri in punctis totidem diverſis ei occurrere debeant. Unde, quorſum tendat eorum contemplatio, & cui uſui eſſe poſſint; plane non apparet.

1027. Inſpecta itaque generalis centri proprietate, quam ſupra * demonſtravimus, potius vocare licebit centrum ſpeciale concurſum *art. 790.
earum dumtaxat diametrorum, quæ ita quidem ibidem ſectæ reperiuntur, ut ſumma ſegmentorum ex uno latere adæquet ſummam ſegmentorum ex latere alio. Hac vero poſita definitione, omnino neceſſe eſt, ut ſit centrum ſpeciale concurſus earum diametrorum, quarum una eſt alterius conjugata. Nam, quum gerant ſibi invicem vices ordinatarum; debet utraque eo in loco eadem omnino lege diſpeſci, qua quælibet ordinata a diametro ſua ſecatur. Atque hac ratione jam elegans oritur quæſtio, num centrum ſpeciale a ſolis diametris conjugatis, an etiam ab aliis habeatur: quam ſane quæſtionem inferius nec etiam gravabimur definire.

1028. Ut ergo eo redeamus, unde diſceſſimus, etſi, præter eas differentias, quas in ſingulis linearum claſſibus ſuperius adnotavimus, quamplures aliæ occurrant; eæ tamen in conſtituendis ſpeciebus linearum calculo ſubjici non debent, quum proprii ſpecierum characteres nullam ex iis mutationem patiantur: tantumque licebit eas recenſere, ubi propria cujuſque ſpeciei natura, ac indoles ad examen revocatur: quas tamen non ipſam ſpeciem ulterius ſcindere putandum eſt, ſed tantum velut accidentia ejus ſpeciei eæ oportet habeantur. Itaque ſpecies illæ, quæ differentiis ſuperius recenſitis conſtituun-

tur, velut ultimæ, ac omnino indiviſibiles debent haberi: & propterea quiſque ordo linearum non plures ſpecies continebit, quam quæ ex illiuſmodi differentiis eruuntur.

1029. Erunt autem fortaſſe nonnulli, qui quæſtionem, hoc loco propoſitam, meri nominis eſſe putabunt: ea ſcilicet moti ratione, quia, ſicuti generum, ac ſpecierum diviſiones ex arbitrio noſtro dependent; ita eas eouſque inſtituere licebit, donec nullæ amplius occurrunt differentiæ. Sed primo, tametſi ultro fateamur, ideas noſtræ mentis non ab omnibus peræque in certum ordinem redigi; hinc tamen non ſequitur, ut rerum genera, ac ſpecies, prout libuerit, conſtitui poſſint. Nam in iis conſtituendis is ordo oportet eligatur, quem ipſa rerum natura ſuppeditat; quum non alio tendat conſtitutio generum, ac ſpecierum, quam ut ea mediante ipſius rerum univerſitatis genuinum ordinem aſſequamur.

1030. Deinde, ſi in generum, ac ſpecierum conſtitutione eo uſque progrediendum eſſet, donec nullum amplius diſcrimen occurreret; jam res abiret in infinitum, totque forent rerum ſpecies conſtituendæ, quota eſt ipſa rerum multitudo. Omnino itaque neceſſe eſt, ut in ſpeciebus conſtituendis eæ dumtaxat differentiæ ſub contemplationem veniant, quibus ſpecies ipſæ circumſcribuntur, & ſuos, ut ita dicam, limites acquirunt. Nec alia, quæ iis ſpeciebus accidere poſſunt, ad novas ſubdiviſiones inſtituendas nos adigere debent. Nam, quum per priores illas differentias ſint ſatis ſuperque circumſcriptæ, ac terminatæ; quæcumque deinceps ſubire de-

deprehenduntur, velut mutationes ipſarum accidentales oportet habeantur.

1031. Verum hæc, quum ſint juris metaphyſici, ultro aliis diſputanda relinquimus Nobis ſatius erit, rationes attuliſſe, cur in diſtinguendis ſpeciebus linearum cujuſque ordinis earum dumtaxat differentiarum rationem habendam eſſe putemus, quas ſupra recenſuimus. Cæterum, ſi in iis conſtituendis velit quis cum Newtono, tum centri differentiam, cum diverſam illam hyperbolarum poſitionem ad calculum revocare; æquum eſt, ut ad hæc duo ſedulo animum convertat. Primo, quod hujuſmodi differentiæ, quum latius ſe extendant, quam Newtono viſum eſt, ſecundum omnem ſuam latitudinem calculo forent ſubjiciendæ. Et deinde, quia præter eas aliæ occurrunt differentiæ, quæ ipſam linearum configurationem nonnihil immutant; rationi conſonum eſſet, ut in ſpeciebus conſtituendis illæ etiam ſub contemplationem venirent.

FINIS.

INDEX

Capitum, & Paragraphorum, quæ in primis tribus hujus Libri Sectionibus continentur.

SECT. I. *De lineis, loca primi, & ſecundi generis terminantibus.*

CAP. I. *Locorum geometricorum natura, geneſis, ac differentiæ.*

I. *Quid ſit locus geometricus, & quomodo oriri intelligatur.*

II. *Qua ratione natura cujuſque lineæ calculo ſubjici poſſit.*

III. *Diſtinctio linearum in geometricas, & mechanicas expoſita, ac emendata.*

IV. *Quomodo lineæ omnes in certa genera diſtingui poſſint.*

V. *Locorum in genera diſtinctio, & enumeratio eorum, quæ ſunt primi, & ſecundi generis.*

CAP. II. *Geneſis, & natura ſectionum conicarum.*

I. *Coni origo, & duplex eum ſecandi ratio.*

II. *Quot ſpecies curvarum ex coni ſectione eruere licet.*

III. *Quæ recta ſit ſectionis conicæ diameter, & qui vertices ejus.*

IV. *Quid ellipſi accidat relate ad diametrum, oſtenditur.*

V. *Quid competat hyperbolæ relate ad diame.*

metrum, *aperitur*.

VI. *Quæ ſit parabolæ natura relate ad diametrum*, *explicatur*.

CAP.III. *Deſcriptio ellipſis*, *& aliæ ejus diametri*.

I. *Quomodo ellipſis in plano deſcribi poſſit*, *oſtenditur*.

II. *Quid ſit centrum ellipſis*, *& quoddam theorema fundamentale pro determinandis diametris aliis*.

III. *Determinatio aliarum diametrorum*, *& earum affinitas cum diametro principali*.

IV. *Diametrorum ellipſis aliæ communes affectiones indicantur*.

V. *Tangentium*, *& ſecantium ellipſis accidentia principaliora*.

CAP.IV. *Deſcriptio hyperbolæ*, *& aliæ ipſius diametri*.

I. *Quomodo hyperbola in plano deſcribi poſſit*, *aperitur*.

II. *Quid ſit centrum hyperbolæ*, *& quoddam theorema fundamentale pro determinandis diametris aliis*.

III. *Determinatio aliarum diametrorum*, *& earum affinitas cum diametro principali*.

IV. *Diametrorum hyperbolæ aliæ communes affectiones afferuntur*.

V. *Tangentium*, *& ſecantium hyperbolæ accidentia principaliora*.

VI. *Quæ ſint aſymptoti hyperbolæ*, *quæve earum proprietates*.

CAP.V. *Deſcriptio parabolæ*, *& aliæ ejus diametri*.

I. *Qua ratione parabola in plano deſcribi poſſit*, *oſtenditur*.

II. *Quæ ſit poſitio diametrorum parabolæ, & quodnam theorema fundamentale, pro iis determinandis.*

III. *Determinatio aliarum diametrorum, & earum affinitas cum diametro principali.*

IV. *Diametrorum parabolæ aliæ communes affectiones recenſentur.*

V. *Tangentium, & ſecantium parabolæ accidentia principaliora.*

SECT. II. *De compoſitione locorum primi, & ſecundi generis.*

CAP. I. *Compoſitio locorum ad rectam.*

I. *Demonſtratio, quod loca primi generis rectis ſolis terminentur.*

II. *Duplex loca primi generis componendi ratio expoſita.*

III. *Compoſitio locorum primi generis per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

IV. *Compoſitio locorum primi generis per formulam, omnium maxime compoſitam.*

V. *Obſervatio quædam ſpecialis circa loca primi generis.*

CAP. II. *Compoſitio locorum ad parabolam.*

I. *Compoſitio locorum ad parabolam per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

II. *Præcedentis loca ad parabolam componendi rationis exempla ſimpliciora.*

III. *Ejuſdem loca ad parabolam componendi rationis exempla magis compoſita.*

V. *Compoſitio locorum ad parabolam per formulam, omnium maxime compoſitam.*

V. *Præcedens loca ad parabolam componendi ratio, exemplis illuſtrata.*

VI

VI. *Monitum circa compoſitionem locorum ad parabolam.*

CAP. III. *Compoſitio locorum ad ellipſim, & circuli circumferentiam.*

I. *Ratio componendi loca ad ellipſim per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

II. *Præcedentis loca ad ellipſim componendi rationis exempla ſimpliciora.*

III. *Ejuſdem loca ad ellipſim componendi rationis exempla magis compoſita.*

IV. *Compoſitio locorum ad ellipſim per formulam, omnium maxime compoſitam.*

V. *Præcedens loca ad ellipſim componendi ratio, exemplis illuſtrata.*

VI. *Monitum circa compoſitionem locorum ad ellipſim.*

VII. *Compoſitio locorum ad circuli circumferentiam, & quomodo dignoſcantur.*

CAP. IV. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam.*

I. *Ratio componendi loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

II. *Præcedentis loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, componendi rationis exempla ſimpliciora.*

III. *Ejuſdem loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, componendi rationis exempla magis compoſita.*

IV. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate*

ad diametrorum aliquam conſideratam, per formulam, omnium maxime compoſitam.

V. *Monitum circa compoſitionem locorum ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam.*

VI. *Præcedens loca ad hyperbolam, relate ad aliquam ex diametris conſideratam, componendi ratio, exemplis illuſtrata.*

VII. *Notio hyperbolæ æquilateræ, & quomodo loca ad eam dignoſci poſſunt.*

VIII. *Demonſtratio theorematis, unde notio pendet hyperbolæ æquilateræ.*

CAP. V. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam.*

I. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, per formulam, omnium ſimpliciſſimam.*

II. *Præcedentis loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, componendi rationis exempla ſimpliciora.*

III. *Ejuſdem loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, componendi rationis exempla magis compoſita.*

IV. *Compoſitio locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, per formulam, omnium maxime compoſitam.*

V. *Præcedens loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, componendi ratio, exemplis illuſtrata.*

VI. *Monita circa compoſitionem locorum ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam.*

SECT. III. *De linearum cujuſque ordinis theoria generali.*

CAP. I. *Linearum cujuſque ordinis formulæ, ſive æquationes generales.*

I. *Ratio conficiendi formulas linearum cujuſcumque ordinis.*

II. *De numero punctorum, per quæ linea cujuſque ordinis tranſire poteſt.*

III. *Theoriæ præcedentis plenior explicatio, duobus exemplis adhibitis.*

IV. *Ejuſdem theoriæ limitatio, pro ſpeciebus linearum cujuſque ordinis.*

V. *Ratio diſtinguendi terminos in formulis linearum cujuſque ordinis.*

CAP. II. *Linearum cujuſque ordinis formularum transformationes.*

I. *Transformationes formularum, pro mutanda in iis ſola linea abſciſſarum.*

II. *Obſervationes circa præcedentes formularum transformationes.*

III. *Transformationes formularum, pro mutanda in iis ſola linea ordinatarum.*

IV. *Obſervationes circa formularum transformationes, mox inſtitutas.*

V. *Transformationes formularum, pro mutanda in iis, tum linea abſciſſarum, cum linea ordinatarum.*

VI. *Præcedentium transformationum propria cujuſque accidentia.*

CAP. III. *Linearum cujuſcumque ordinis diametri, axes, & centra.*

I. *Configuratio linearum cujuſcumque ordinis, ſummatim oſtenſa.*

II. *Diametri notio generalis, ejuſque determinandæ ratio.*

III. *Diſtinctio diametrorum in genera, ubi etiam de diametris curvilineis.*

IV. *Ratio inveniendi, tum axes, cum diametros conjugatas linearum cujuſque ordinis.*

V. *Quomodo definire liceat centrum in lineis ordinum omnium.*

CAP. IV. *Linearum cujuſque ordinis ſecantes, tangentes, & aſymptoti.*

I. *De numero punctorum, in quibus lineæ ordinum omnium a recta ſecari poſſunt.*

II. *Proprietas ſecantium, pro ſingulis linearum ordinibus demonſtrata.*

III. *Proprietas diametrorum, relate ad ſuas ordinatas, earumque latera recta, ac tranſverſa.*

IV. *Theoria tangentium, & notio punctorum irregularium, & multiplicium, quæ dari poſſunt in lineis.*

V. *Ratio determinandi tangentes linearum, relate ad puncta, tum regularia, cum irregularia.*

VI. *Ratio determinandi aſymptotos linearum, earumque theoria generalis.*

CAP. V. *Ratio diſtinguendi ſpecies linearum cujuſcumque ordinis.*

I. *Linearum cujuſque ordinis claſſes præcipuæ ſtatuuntur.*

II. *Quomodo crura parabolica ab hyperbolicis ſint diſtinguenda.*

III. *Theoriæ præcedentis caſus ſingularis expenditur.*

IV.

IV. *Subdiviſiones, quæ locum habent in hyperbolis puris.*

V. *Subdiviſiones, quæ inſtitui debent in aliis linearum claſſibus.*

VI. *Quomodo fieri poſſit, ut ordinatæ tendant ad plagam cruris infiniti.*

VII. *Nam in recenſendis ſpeciebus linearum centri ratio ſit habenda.*

VIII. *Corollarium theoriæ præcedentis, eademque plenius vindicata.*

FINIS INDICIS.

ER-

ERRATA.

Pag. 153.	lin. 34.	$a = x$	leg.	$a = \bar{z}$
158.	30.	$c^2 = ax$		$c^2 = cx$
159.	1.	$c^2 = ax$		$c^2 = cx$
180.	29.	FG		GH
183.	12.	diameter		ſemidiameter
208.	18.	$+ 4xy$		$+ 4axy$
304.	12.	$a\sqrt[3]{2}$		$a\sqrt[3]{2} : 3$
	18.	$a\sqrt[3]{2}$		$a\sqrt[3]{2} : 3$
306.	1.	$a\sqrt[3]{2}$		$a\sqrt[3]{2} : 3$
322.	32.	ADL		AEL
350.	30.	CN		EN

MONITUM.

IN laudandis figuris nonnulla etiam errata irrepſerunt. Quæ enim pag. 67, & 71, laudatur ut octava, ea eſt nona; quæ item pag. 342 laudatur ut ſeptuageſima tertia, ea eſt octogeſima prima; quæque demum pag. 433 laudatur ut ſeptuageſima tertia, ea eſt octogeſima. Sed figura nona bis occurrit: quod ideo factum, quia omnes rectæ, quibus opus erat, non poterant una ſola commode exhiberi.

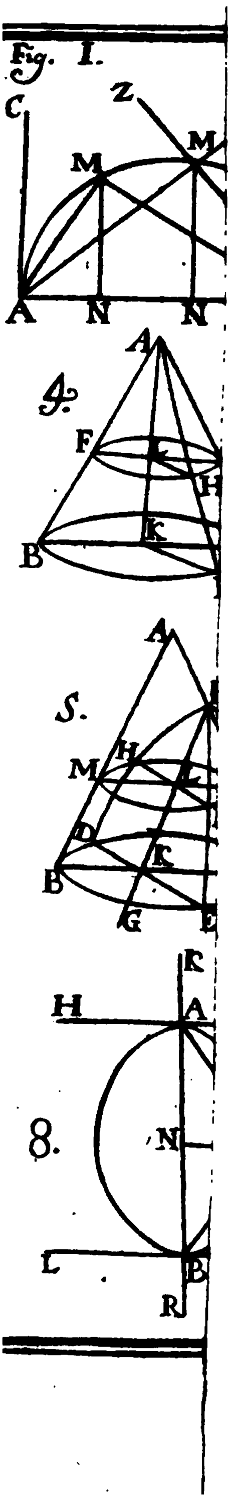
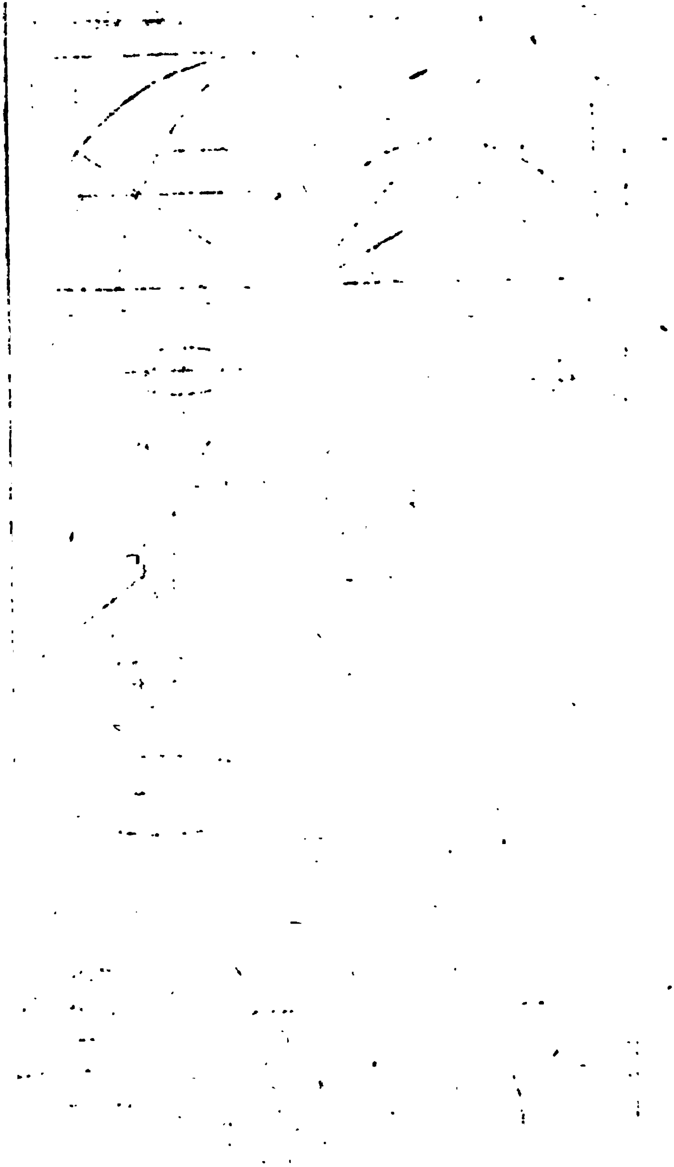
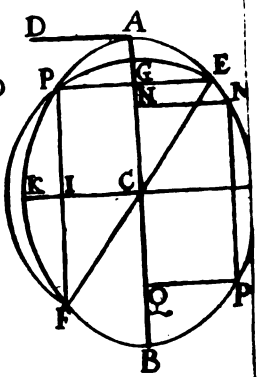
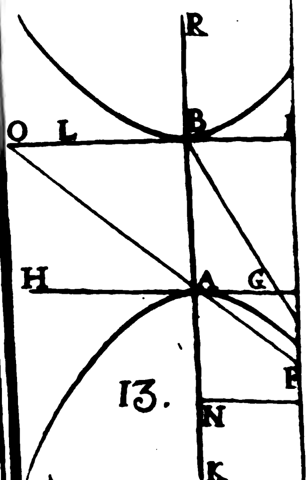


Fig. I.
C
Z
M
M
A
N
N
A
4.
F
L
H
K
B
A
5.
H
M
L
D
K
B
G
E
K
H
A
8.
N
L
B
R

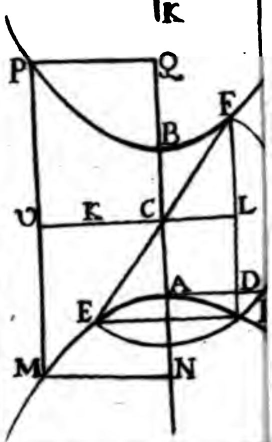


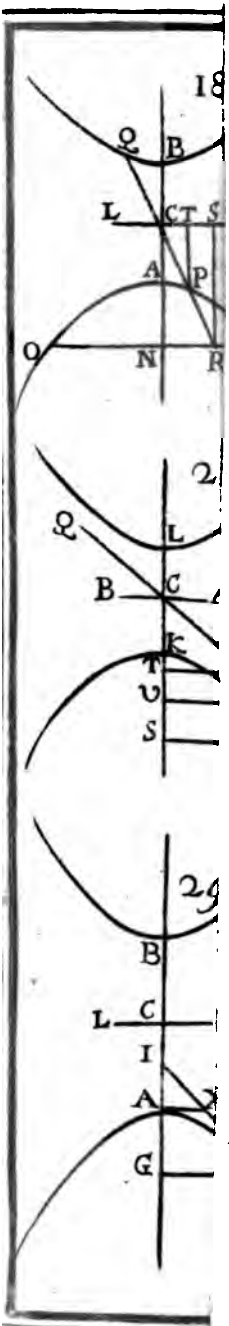
10

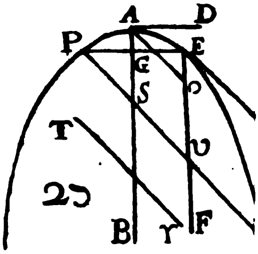


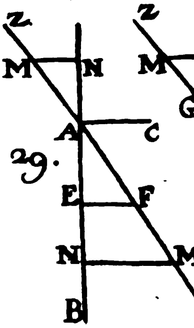


13.

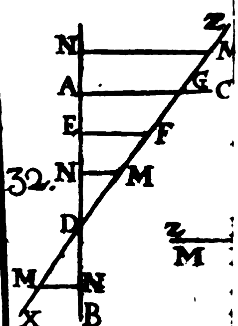


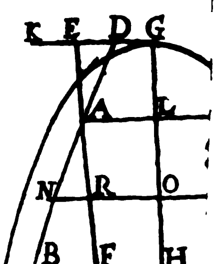


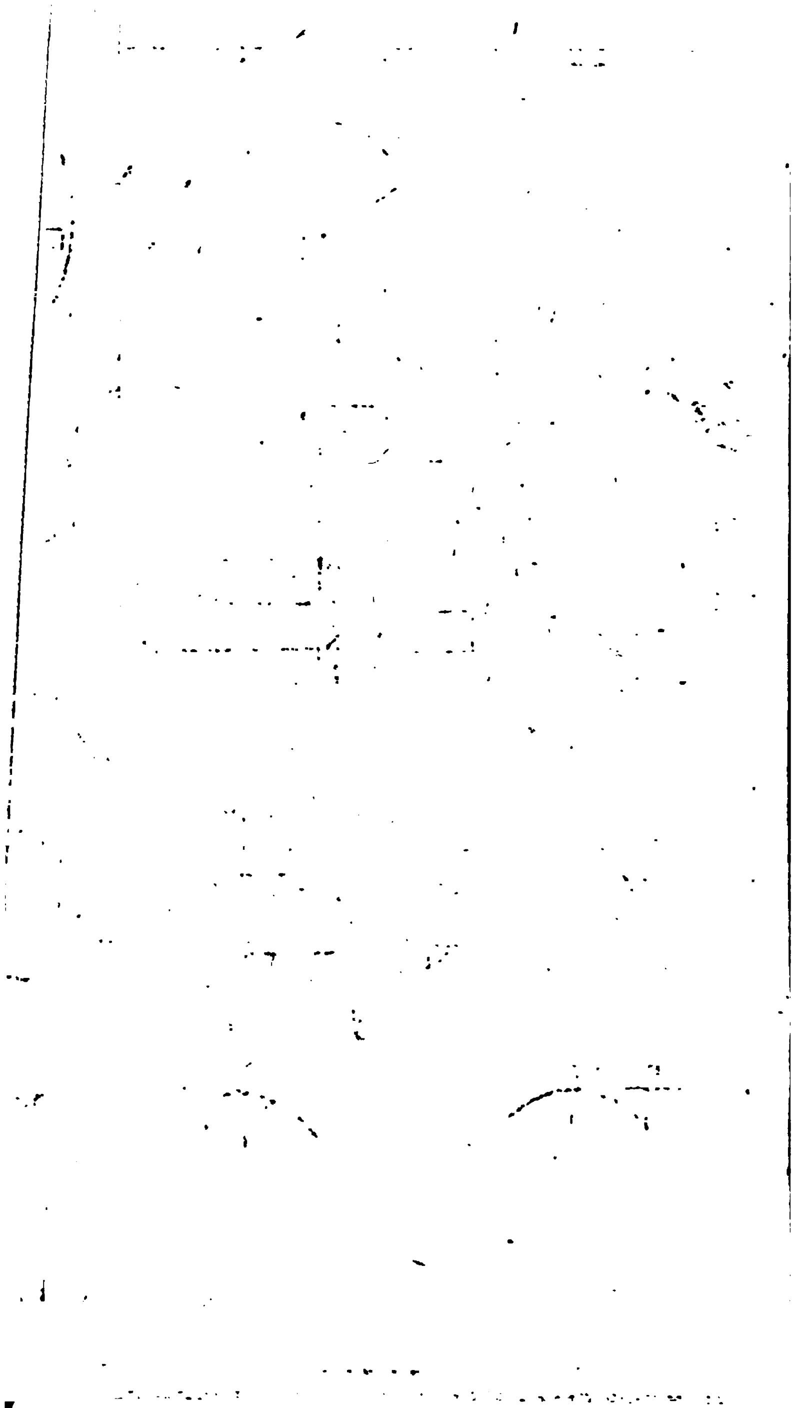

A D
P E
G
S
T
25
B F

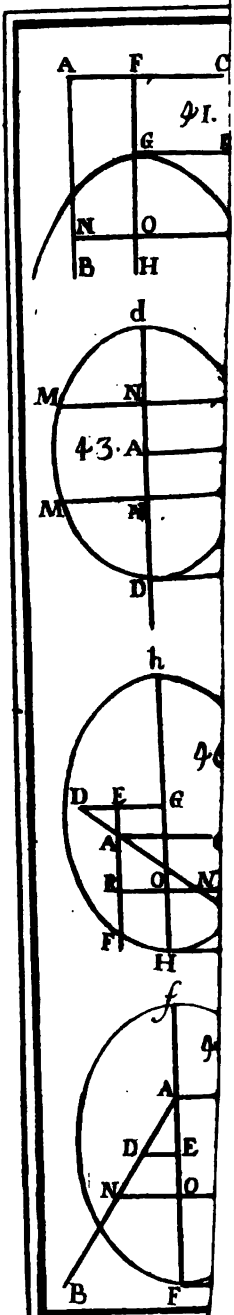

Z
M N
A C
29.
E F
N M
B


Z
M
G
M
31

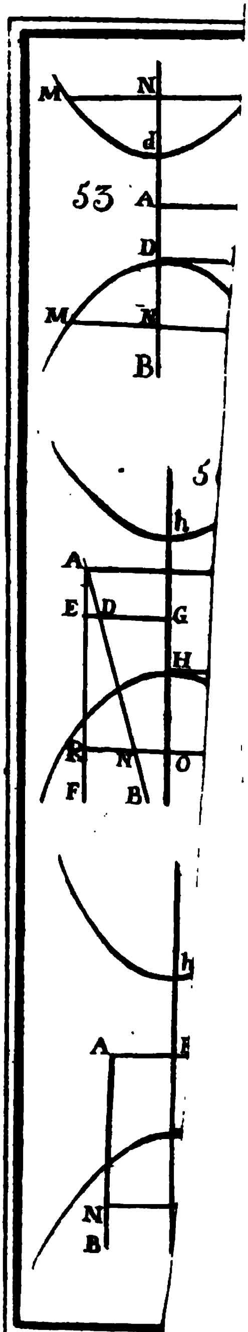

Z
N
A G C
E F
32. N M
D
M N
X B
Z
M

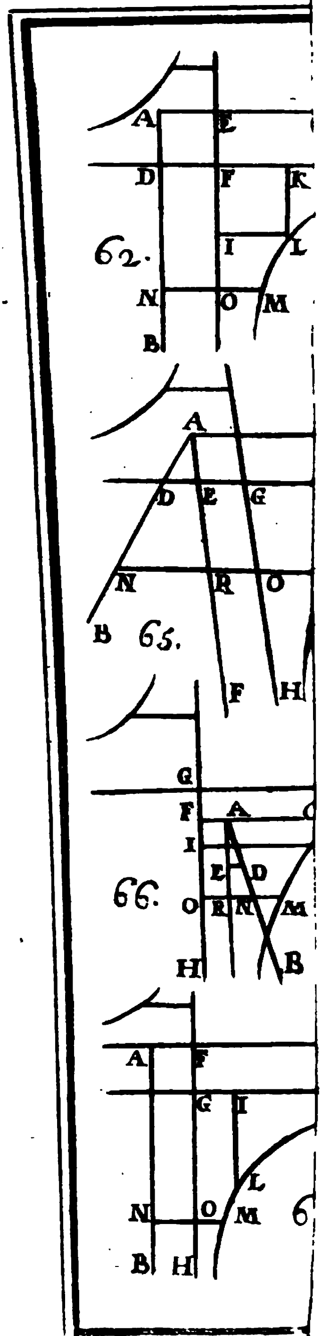

K E D G
A L
N R O
B F H

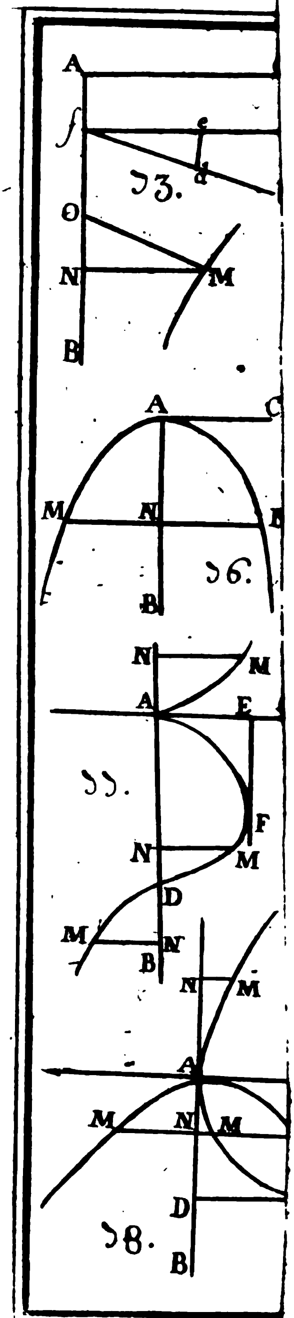




41.
A F C
G
N O
B H
d
M N
43. A
M N
D
h
D E G
A
O N
F
H
f
A
D E
N O
B F


M
N
d
53
A
D
M
N
B
5
h
A
E
D
G
H
R
N
O
F
B
h
A
N
B


A E
D F K
62.
I L
N O M
B
A
D E G
N R O
B 65.
F H
G
F A
I
E D
66.
O R N M
H B
A F
G I
L
N O M 6
B H


A
f
e
d
53.
O
N
M
B
A
C
M
N
56.
B
N
M
A
E
55.
F
N
M
D
M
N
B
N
M
A
M
N
M
D
58.
B

